Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 0 4 2 4 0 2 1 2

JESENSKI ROK

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Višja raven

Ponedeljek, 30. avgust 2004 / 90 minut

Dovoljeno dodatno gradivo in pripomočki:
kandidat prinese s seboj nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, žepni računalnik brez grafičnega zaslona in brez možnosti simboličnega računanja, šestilo in 2 trikotnika, lahko tudi ravnilo.
Kandidat dobi dva ocenjevalna obrazca in dva konceptna lista.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila. Ne izpuščajte ničesar!

Ne obračajte strani in ne začenjajte reševati nalog, dokler Vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalna obrazca).

V tej izpitni poli so 3 strukturirane naloge. Rešujte vse naloge. Naloge rešujte pod besedilom naloge in na naslednji strani. Strani 10, 11 in 12 so rezervne. Uporabite jih le, če Vam zmanjka prostora. Nedvoumno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. **Drugih konceptnih listov ocenjevalci ne bodo pregledovali.**

Pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom. **Če se zmotite, napisano prečrtajte.** Grafe funkcij rišite s svinčnikom. Pazite, da bo Vaš izdelek pregleden in čitljiv. Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vmesnimi računi in sklepi.

Na strani 2 je standardna zbirka zahtevnejših formul, ki jih ni treba znati na pamet. Morda si boste s katero med njimi pomagali.

Naloge, pisane z navadnim svinčnikom, nejasne in nečitljive rešitve se ovrednotijo z nič (0) točkami. Če ste nalogo reševali na več načinov, nedvoumno označite, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje.

Vsako nalogo skrbno preberite. Rešujte premišljeno. Zaupajte vase in v svoje sposobnosti.

Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 12 strani, od tega 3 rezervne.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - .... + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)$
- Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$
- Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$
- Kotne funkcije polovičnih kotov:
  $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
- Kotne funkcije trojnih kotov:
  $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- Adicijski izrek:
  $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

  $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

  $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$
- Faktorizacija:
  $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

  $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

  $\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\operatorname{ctg}x \pm \operatorname{ctg}y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$
- Razčlenitev produkta kotnih funkcij:
  $\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$;

  $\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$;

  $\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
- Razdalja točke $T_0\left(x_0, y_0\right)$ od premice $ax + by - c = 0$:

  $d\left(T_0, p\right) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$
- Ploščina trikotnika z oglišči $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$, $C\left(x_3, y_3\right)$:

  $S = \frac{1}{2}\left|\left(x_2 - x_1\right)\left(y_3 - y_1\right) - \left(x_3 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right)\right|$
- Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$; $a > b$
- Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, a je realna polos.
- Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrala:
  $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

OBRNITE STRAN

01. V enakostraničnem trikotniku ABC s stranico dolžine 4 naj bosta vektorja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Točka D naj leži na stranici BC tako, da je $|BD| : |DC| = 1 : 3$.

a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter izračunajte njegovo dolžino. Rezultat naj bo točen.

(5 točk)

b) Izračunajte kot med vektorjema $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{AC}$. Kot zapišite na minuto natančno.

(5 točk)

c) Izračunajte število x tako, da bo vektor $x\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ vzporeden vektorju $2\vec{a} - \vec{b}$.

(5 točk)

d) Izračunajte število y tako, da bo vektor $\vec{a} + y\vec{b}$ pravokoten na vektor $5\vec{a} - 4\vec{b}$.

(6 točk)

02. Dana je funkcija $f(x) = x + \dfrac{8}{x^2}$.

a) Zapišite definicijsko območje, ničlo, pol, poševno asimptoto in stacionarno točko. (Obe koordinati stacionarne točke zapišite na eno decimalko natančno.)

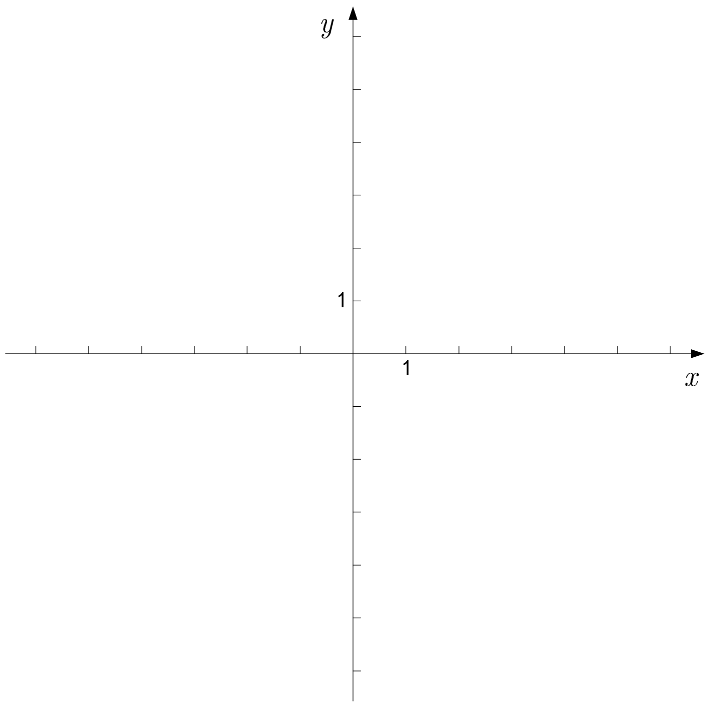
(10 točk)

b) V dani koordinatni sistem narišite graf funkcije f.
Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepajo graf funkcije f ter premice $y = x$, $x = 2$ in $x = 5$.

(10 točk)

c) Točka $P(x,\ f(x))$, $(x > 0)$ leži na grafu funkcije f. Vzporednica abscisni osi skozi točko P seka ordinatno os v točki N, vzporednica ordinatni osi skozi točko P pa seka abscisno os v točki M. Izračunajte natančno vrednost abscise točke P, za katero je ploščina trikotnika OMN ekstremna. Narišite sliko.

(7 točk)



03. Prva dva člena neskončne geometrijske vrste sta $a_1 = x$ in $a_2 = x^2 - x$ ($x \in \mathbb{R}$; $x \neq 0$, $x \neq 1$).

a) Za katere vrednosti x je vrsta konvergentna (ima vsoto)?

(5 točk)

b) Izračunajte x tako, da bo vsota vrste enaka 5.

(4 točk)

c) Izračunajte x tako, da bo $4a_1^4 + a_2 = 0$.

(5 točk)

d) Naj bo $x = \frac{4}{3}$. Koliko začetnih členov te vrste moramo sešteti, da se bo njihova vsota za manj kakor 10^{-8} razlikovala od vsote neskončne vrste? Odgovor napišite s stavkom.

(10 točk)

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN