



Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center



SPOMLADANSKI ROK
TAVASZI IDŐSZAK

MATEMATIKA

≡ Izpitna pola 2 ≡
2. feladatlap
Višja raven
Emelt szint

Ponedeljek, 6. junij 2005 / 90 minut
2005. június 6., hétfő / 90 perc

*Dovoljeno dodatno gradivo in pripomočki:
kandidat prinese s seboj nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko,
žepni računalnik brez grafičnega zaslona in brez možnosti simboličnega računanja,
šestilo in 2 trikotnika, lahko tudi ravnilo.
Kandidat dobi dva ocenjevalna obrazca in dva konceptna lista.*

*Engedélyezett segédeszközök: a jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát,
radírt, csak műveleteket végző zsebszámológépet, körzőt és 2
háromszögvonalzót vagy vonalzót hoz magával.
A jelölt két értékelőlapot és két vázlatlapot is kap.*

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

*Ta pola ima 16 strani, od tega 3 rezervne.
A feladatlap terjedelme 16 oldal, ebből 3 tartalék.*

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila. Ne izpuščajte ničesar!

Ne obračajte strani in ne začenjajte reševati nalog, dokler Vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalna obrazca).

V tej izpitni poli so 3 strukturirane naloge. Rešujte vse naloge. Naloge rešujte pod besedilom naloge in na naslednji strani. Strani 12, 13 in 14 so rezervne. Uporabite jih le, če Vam zmanjka prostora. Nedvoumno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. **Drugih konceptnih listov ocenjevalci ne bodo pregledovali.**

Pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom. **Če se zmotite, napisano prečrtajte.** Grafe funkcij rišite s svinčnikom. Pazite, da bo Vaš izdelek pregleden in čitljiv. Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vmesnimi računi in sklepi.

Na strani 4 in 5 je standardna zbirka zahtevnejših formul, ki jih ni treba znati na pamet. Morda si boste s katero med njimi pomagali.

Naloge, pisane z navadnim svinčnikom, nejasne in nečitljive rešitve se točkujejo z nič (0) točkami. Če ste nalogo reševali na več načinov, nedvoumno označite, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje.

Vsako nalogo skrbno preberite. Rešujte premišljeno. Zaupajte vase in v svoje sposobnosti.

Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40

Želimo Vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót! Semmit se hagyjon ki!

Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg ezt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát (a feladatlap első oldala jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelőlapokra)!

Ez a feladatlap 3 strukturált feladatot tartalmaz. Mindegyiket oldja meg! A megoldást a szöveg alá és a következő oldalra írja! A 12., 13. és a 14. oldal tartalék. Csak abban az esetben írjon oda, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon!

Az értékelők a vázlatlapokat nem nézik át.

Töltőtollal vagy golyóstollal írjon! **A rossz válaszait húzza át!** A függvénygrafikonokat ceruzával rajzolja be! Ügyeljen arra, hogy munkája áttekinthető és olvasható legyen! A feladat megoldásának világosan és korrekten kell mutatnia az eredményhez vezető utat, a közbeeső számításokkal és következtetésekkel együtt.

A 4. és 5. oldalon található azon képletek standard gyűjteménye, amelyeket nem kell fejből tudnia, de amelyeknek egy része talán segítségére lehet a feladatok megoldásában.

A ceruzával írt, valamint a zavaros és olvashatatlan válaszokat nulla (0) ponttal értékeljük. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljük!

Figyelmesen olvassa el mindegyik feladatot, majd megfontoltan oldja meg őket! Bízson önmagában és képességeiben!

Összesen 40 pont érhető el.

Eredményes munkát kívánunk.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$
- Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a + b + c}{2}$
- Kotne funkcije polovičnih kotov:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Kotne funkcije trojnih kotov:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$
- Adicijski izrek:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Faktorizacija:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$
- Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
- Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, a je realna polos.
- Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrala:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

KÉPLETEK

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- *A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele:* $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$
- *A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara:* $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

- *A félszögek szögfüggvényei:*

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

- *A szög háromszorosának szögfüggvényei:*

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

- *Addíciós tételek:*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

- *Tényezőkre bontás:*

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

- *A szögfüggvények szorzatának felbontása:*

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

- *A $T_0(x_0, y_0)$ pont távolsága az $ax + by - c = 0$ egyenestől:*

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

- *Az $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ csúcsú háromszög területe:*

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

- *Ellipszis:* $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$

- *Hiperbola:* $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, az a valós féltengely

- *Parabola:* $y^2 = 2px$, fókuszpont $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

- *Integrálok:*

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

01. Imamo funkciji $f(x) = e^x$ in $g(x) = 2e^{-x}$.

Adott a $f(x) = e^x$ és $g(x) = 2e^{-x}$ függvény.

- a) V dani koordinatni sistem skicirajte grafa funkcij f in g . Izračunajte kot med grafom funkcije g in ordinatno osjo. Rezultat zaokrožite na kotne minute.

Az adott koordináta-rendszerben ábrázolja az f és a g függvények grafikonját! Számítsa ki a g függvénygrafikon és az ordinátatengely által közbezárt szöveget! Az eredményt kerekítse szögpercekre!

(6 točk/pont)

- b) Izračunajte točni koordinati presečišča grafov funkcij f in g .

Számítsa ki az f és a g függvénygrafikonok metszéspontjának pontos koordinátáit!

(3 točke/pont)

- c) Naj bo L lik, ki ga v prvem kvadrantu omejujejo grafa funkcij f in g ter ordinatna os.

Pokažite, da je ploščina lika L enaka $3 - 2\sqrt{2}$.

Legyen L azon síkidom, amelyet az első síknegyedben az f és a g függvénygrafikonok és az ordinátatengely határolnak! Bizonyítsa, hogy az L síkidom területe $3 - 2\sqrt{2}$!

(3 točke/pont)

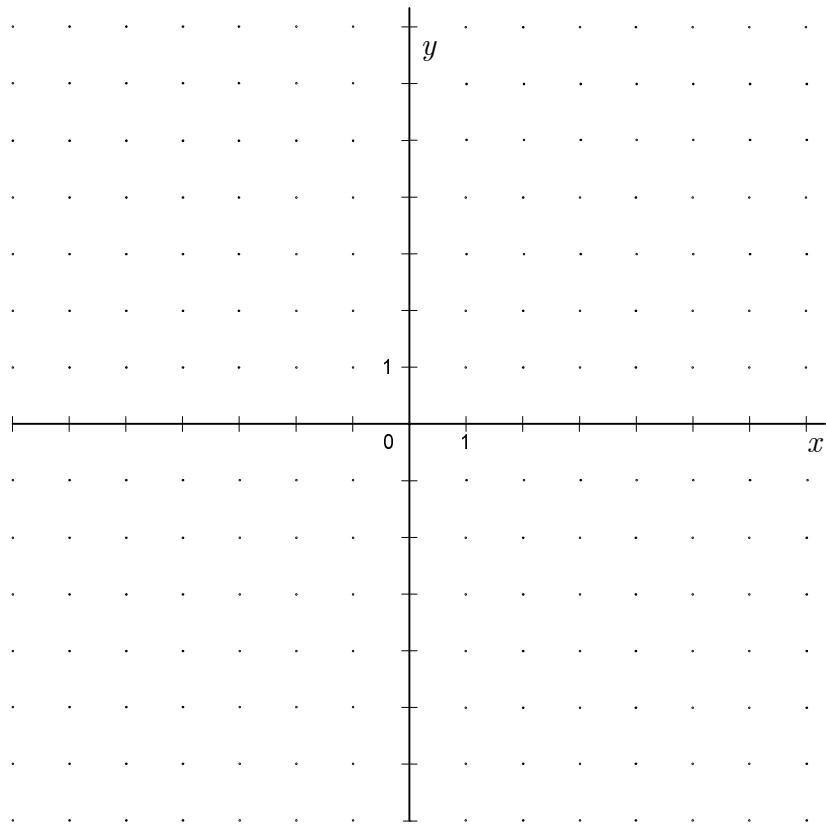
- d) Poiščite inverzno funkcijo g^{-1} funkcije g .

Pokažite, da je $(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = \ln 2 - x$.

Keresse meg a g függvény g^{-1} reciprok függvényét! Bizonyítsa, hogy:

$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = \ln 2 - x!$

(3 točke/pont)



02. V pravokotnem koordinatnem sistemu v prostoru imamo točke $A(3, t, -5)$, $B(2t, 4, -1)$ in $C(6, 8, 7)$. Krajevne vektorje teh točk označimo $\vec{a} = \vec{r}_A$, $\vec{b} = \vec{r}_B$ in $\vec{c} = \vec{r}_C$.

A térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontok vannak: $A(3, t, -5)$, $B(2t, 4, -1)$ és $C(6, 8, 7)$. Ezen pontok helyi vektorjait így jelöljük: $\vec{a} = \vec{r}_A$, $\vec{b} = \vec{r}_B$ és $\vec{c} = \vec{r}_C$.

- a) Za kateri vrednosti realnega števila t je dolžina vektorja $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ enaka 11?

A t valós szám melyik két értékénél 11 a $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza?

(4 točke/pont)

- b) Izračunajte realno število t tako, da bo trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri oglišču C .

Számítsa ki a t valós számot úgy, hogy az ABC derékszögű háromszög derékszöge a C csúcsban legyen!

(4 točke/pont)

- c) Naj bo $t = 2$. Pokażite, da ležijo v tem primeru vektorji \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} v isti ravnini.

Legyen $t = 2$! Bizonyítsa, hogy ebben az esetben az \vec{a} , \vec{b} és a \vec{c} vektorok egy síkban fekszenek!

(4 točke/pont)

03. V krogu s središčem S in polmerom 2 cm je tetiva MN dolga $2\sqrt{3}$ cm .

Az S középpontú és 2 cm sugarú körben az MN húr hossza $2\sqrt{3}$ cm .

a) Izračunajte središčni kot $\varphi = \sphericalangle MSN$.

Számítsa ki a $\varphi = \sphericalangle MSN$ középponti szöget!

(2 točki/pont)

b) Izračunajte ploščino trapeza, ki ima za osnovnici tetivo MN in premer kroga. Zapišite točen rezultat.

Számítsa ki azon trapéz területét, amelynek az alapélei az MN húr és a kör átmérője!

Pontosan írja fel az eredményt!

(2 točki/pont)

c) Koliko odstotkov ploščine kroga predstavlja ploščina manjšega od krožnih odsekov, ki ju določa tetiva MN ?

A kör területének hány százalékát jelenti az MN húr által keletkezett két körszelet közül a kisebbik területe?

(4 točke/pont)

d) Točka P naj bo tretje oglišče trikotnika MNP , včrtanega danemu krogu, pri čemer je kot $\sphericalangle MPN$ ostri kot, dolžini stranic MP in NP pa sta v razmerju 2 : 1 . Izračunajte velikost kota $\sphericalangle MPN$ in dolžini stranic MP in NP .

A P pont azon MNP háromszög harmadik csúcsa legyen, amely az adott körbe van írva úgy, hogy az $\sphericalangle MPN$ szög hegyesszög, az MP és az NP oldalak hosszának aránya 2 : 1 ! Számítsa ki az $\sphericalangle MPN$ szög nagyságát és az MP és az NP oldalak hosszát!

(5 točk/pont)

REZERVNA STRAN
PÓTOLDAL

REZERVNA STRAN
PÓTOLDAL

REZERVNA STRAN
PÓTOLDAL

PRAZNA STRAN
ÜRES OLDAL

PRAZNA STRAN
ÜRES OLDAL