



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 0 5 1 4 0 2 1 1 1

PRIMA SESSIONE D'ESAME

# MATEMATICA

## Prova d'esame 1

### Livello superiore

**Lunedì 6 giugno 2005 / 90 minuti**

*Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.*

**MATURITÀ GENERALE**

#### INDICAZIONI PER I CANDIDATI

**Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!**

**Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 12 esercizi, vanno risolti tutti nello spazio sotto il testo dell'esercizio. **I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate. Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

**Gli esercizi risolti a matita e le risoluzioni non chiare e illeggibili verranno valutati con zero (0) punti. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.**

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 80 punti.

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Buon lavoro.

*Questa prova d'esame ha 16 pagine, di cui 2 vuote.*

## **Formule**

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,  $r = \frac{A}{p}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:  

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:  
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:  
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:  
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
,  $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:  
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$ ;  
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$ ;  
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :  

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a > b$
- Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a$  è il semiasse reale.
- Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:  

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

01. Scrivete l'equazione della retta  $p$  che passa attraverso il punto  $A(1, 0)$  ed è parallela alla retta  $2x + y = 4$ . Determinate l'intersezione della retta  $p$  con l'asse delle ordinate.

*(7 punti)*

02. Nel triangolo rettangolo  $ABC$  (l'angolo retto è nel vertice  $C$ ) i lati  $a = 3$  cm e  $c = 6$  cm .  
Calcolate con esattezza la lunghezza del lato  $b$  e le ampiezze degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  . Fate lo schizzo.

*(6 punti)*

03. È data la progressione aritmetica 1, 7, 13 ... Calcolate quale numero è il millesimo membro della progressione e qual è la somma dei primi mille termini della progressione.

*(6 punti)*

04. Dimostrate che l'uguaglianza  $\frac{\sin x (\cos 2x + 1)}{\cos x \sin 2x} = 1$  è vera per ogni  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(5 punti)

05. Un raccoglitore di funghi ha nel cesto gallinacci, porcini e amanite. I tre quarti di tutti i funghi sono gallinacci, il venti per cento sono porcini, le amanite sono due. Quanti funghi ha il raccoglitore di funghi nel cesto?

*(5 punti)*

06. Risolvete l'equazione quadratica  $x^2 - ax + a = 0$  per  $a = -2$ . Semplificate le soluzioni. Scrivete le soluzioni esatte. Per quali valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  l'equazione  $x^2 - ax + a = 0$  ha un'unica soluzione?

*(8 punti)*

07. Quale numero complesso  $z$  soddisfa l'equazione  $(1 - i)z = 3 + 4i$ ? Scrivete  $\operatorname{Re} z$  e  $\operatorname{Im} z$  e calcolate  $|z|$ . Fate l'estrazione parziale del valore di  $|z|$ .

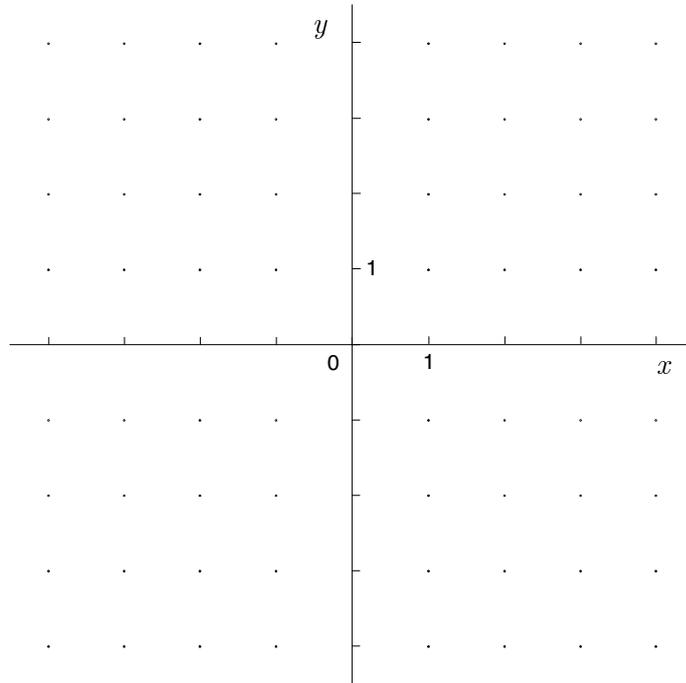
*(7 punti)*

08. Nel sistema coordinato ortogonale sono dati i punti  $A(2, 1)$ ,  $B(-2, 3)$  e  $C(3, -2)$ . Scrivete i vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  con le componenti, calcolate il loro prodotto scalare e l'ampiezza dell'angolo che essi racchiudono.

*(8 punti)*

09. Scrivete l'equazione dell'ellisse che ha il centro nell'origine del sistema coordinato, uno dei vertici è  $T(0, 1)$  ed un suo fuoco è  $F(\sqrt{3}, 0)$ . Tracciate l'ellisse nel sistema coordinato dato.

(7 punti)



10. Semplificate l'espressione  $\log_2 a + \log_2 4a - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 2a^2$  per  $a > 0$ .

*(7 punti)*

11. In un gruppo ci sono 10 ragazze e 10 ragazzi. Di questi 3 ragazze e 8 ragazzi hanno la patente di guida. Scegliamo a caso 1 ragazzo ed 1 ragazza. Calcolate la probabilità, che almeno uno dei due abbia la patente di guida.

*(6 punti)*

12. Calcolate l'intersezione delle curve  $y = \frac{2x^2 - 8}{x + 3}$  e  $y = 2x - 1$  e l'angolo tra di loro.

*(8 punti)*

PAGINA VUOTA

PAGINA VUOTA