



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 0 7 2 4 0 2 1 1 1

SECONDA SESSIONE D'ESAME

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 1 ≡

Martedì, 28 agosto 2007 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato vanno consegnati il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 12 esercizi, vanno risolti tutti nello spazio sotto il testo dell'esercizio. **I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame non vanno scritti a matita. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.

Leggete attentamente ogni esercizio, lavorate con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 80 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 16 pagine, di cui 2 bianche.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

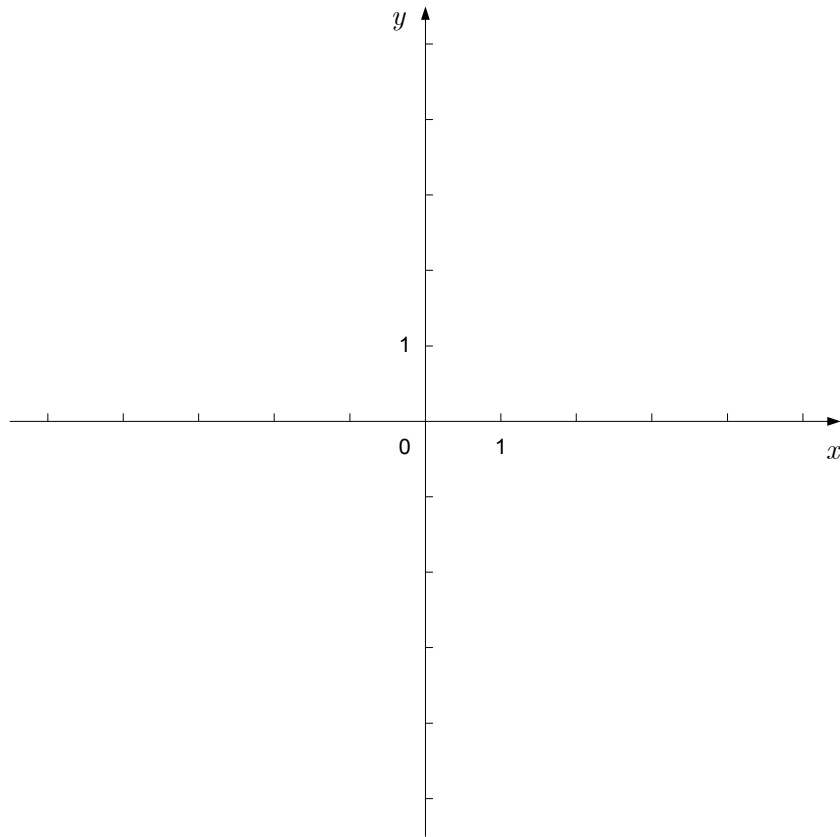
$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

01. Disegnate nel sistema di coordinate l'insieme dei punti $T(x, y)$ per i quali vale che $1 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 2$. Ombreggiate la figura ottenuta e calcolate la sua area.

(7 punti)



02. Nel triangolo isoscele ABC le lunghezze dei lati sono $c = |AB| = 4$ cm ,
 $a = |BC| = |AC| = 6$ cm . Calcolate l'area del triangolo e l'angolo $\beta = \sphericalangle ABC$. Scrivete con
esattezza il valore dell'area, l'angolo β invece sia espresso al centesimo di grado.

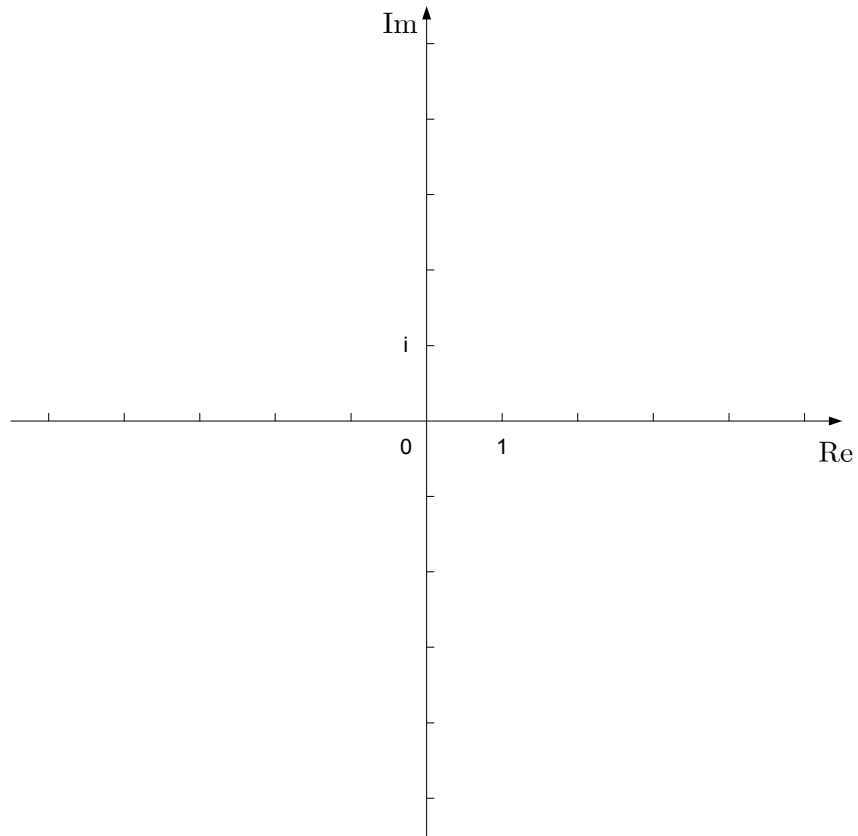
(6 punti)

03. Calcolate le derivate delle funzioni: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2 \sin x$, $h(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Semplificate la derivata della funzione $h(x)$.

(8 punti)

04. Disegnate nel piano complesso l'immagine del numero complesso $z = 2 - 3i$. Quant'è il suo valore assoluto? Calcolate z^2 e $\frac{1}{z}$.

(7 punti)

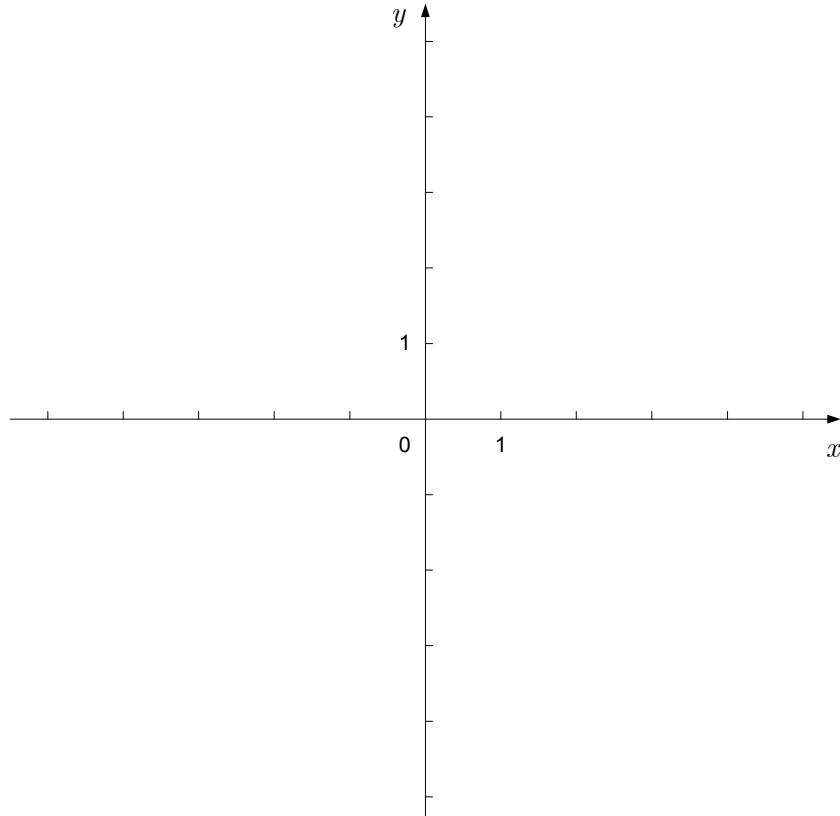


05. Il grafico della funzione di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa per i punti $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 5)$. Calcolate i numeri a , b e c e con essi scrivete la funzione f .

(6 punti)

06. Tracciate, nel sistema di coordinate dato, l'iperbole $4x^2 - y^2 = 4$ (disegnate anche gli asintoti).
Calcolate e scrivete le intersezioni dell'iperbole e della retta $y = x + 1$.

(8 punti)



07. Risolvete l'equazione $\log_x (x + 30) = 2$.

(5 punti)

08. Nella successione aritmetica $a_1, a_2, 2, a_4, 8 \dots$ calcolate a_1, a_2, a_4, a_{671} e la somma dei primi 671 termini.

(8 punti)

09. Dimostrate che per ogni x il valore dell'espressione $\sin 2x + 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ è uguale a 1.

(5 punti)

10. In un'urna ci sono 4 palline azzurre e 6 palline gialle. Dall'urna vengono estratte alla cieca 2 palline. Calcolate la probabilità che le due palline siano dello stesso colore.

(6 punti)

11. È dato il vettore $\vec{a} = (-2, 1)$. Calcolate con esattezza il modulo del vettore \vec{a} . Scrivete le coordinate del vettore \vec{b} se $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

(8 punti)

12. Scrivete il numero $a = 1,\overline{24}$ in frazione ridotta ai minimi termini. Calcolate, con il valore dato a , il valore dell'espressione $(1 - a^{-1})^{-1}$. Scrivete il risultato in frazione ridotta ai minimi termini.

Risolvete l'esercizio senza usare la calcolatrice tascabile.

(6 punti)

PAGINA BIANCA

PAGINA BIANCA