Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 0 8 1 4 0 2 1 2 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
Prova d'esame 2

Sabato, 7 giugno 2008 / 90 minuti

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.
Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e due schede di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulle due schede di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 3 quesiti strutturati, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine sucessive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Le pagine 10, 11 e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 12 pagine, di cui 1 bianca e 3 di riserva.

Formule

- $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\,....+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2=ca_1$, $b^2=cb_1$, $h_c^2=a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R=\dfrac{abc}{4A}$, $r=\dfrac{A}{p}$, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:
  $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
  $\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x$, $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$
- Teoremi di addizione:
  $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$

  $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

  $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
  $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$, $\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

  $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

  $\tan x\pm\tan y=\dfrac{\operatorname{sen}(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\cot x\pm\cot y=\dfrac{\operatorname{sen}(y\pm x)}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
  $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$;

  $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$;

  $\operatorname{sen}x\cos y=\dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)\right]$
- Distanza del punto $T_0(x_0,y_0)$ dalla retta $ax+by-c=0$:
  $d\left(T_0,p\right)=\left|\dfrac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$:
  $A=\dfrac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|$
- Ellisse: $e^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\dfrac{e}{a}$; $a>b$
- Iperbole: $e^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\dfrac{e}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2=2px$, fuoco $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$
- Integrali:
  $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+C$

Pagina bianca

01. È dato il polinomio $p(x) = -\dfrac{x^3}{18} + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Calcolate gli zeri e gli estremi del polinomio, e tracciatene il grafico.

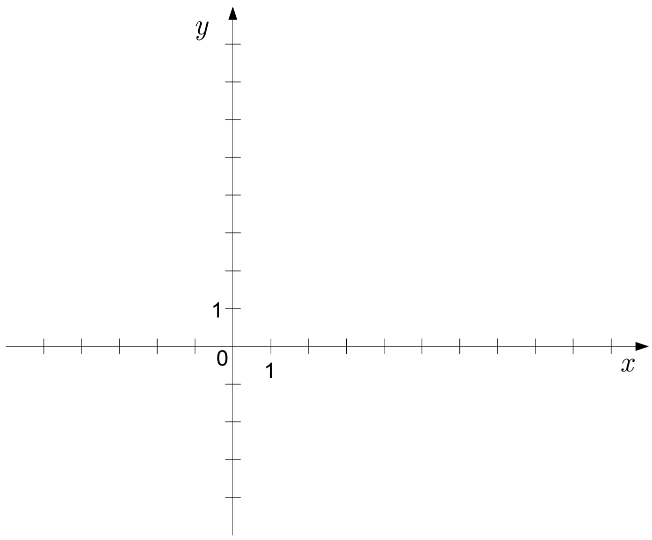
(5 punti)

b) La bisettrice dei quadranti dispari e il grafico del polinomio p formano due figure. Dimostrate che esse hanno aree uguali.

(6 punti)

c) Sia $T(x, y)$, $0 < x < 9$, un punto del grafico del polinomio p e T' la proiezione ortogonale del punto T sull'asse delle ascisse. Calcolate l'ascissa del punto T in modo che l'area del triangolo $OT'T$ sia massima. O è l'origine del sistema di coordinate.

(4 punti)



02. I numeri z e w sono due numeri complessi.

a) Siano $z = 3 + 2\mathrm{i}$ e $w = \dfrac{z+3}{z-3}$. Calcolate $\operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Im} w$.

(3 punti)

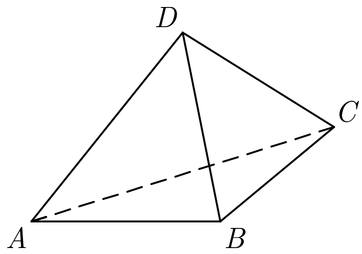
b) Sia $z = 3 + y\mathrm{i}$. Calcolate per quale numero reale y risulta che $\left|\dfrac{z+3}{z-3}\right| = \sqrt{5}$.

(3 punti)

c) Rappresentate nel piano complesso tutti i numeri complessi $z = x + y\mathrm{i}$ per i quali vale che $w = \dfrac{z+3}{z-3}$ è solo un numero immaginario.

(5 punti)

03. È data la piramide a base triangolare $ABCD$.



a) La circonferenza circoscritta al triangolo ABC (e per il quale $\alpha = \sphericalangle BAC = 45^\circ$, $\beta = \sphericalangle ABC = 60^\circ$) ha il centro nel punto S e raggio $R = 2\ \mathrm{cm}$. Calcolate il prodotto scalare $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$.

(4 punti)

b) Esprimete i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$ come combinazioni lineari dei vettori $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Dimostrate che vale l'uguaglianza $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

(4 punti)

c) Sia la piramide $ABCD$ un tetraedro. Dimostrate che gli spigoli opposti AB e CD sono tra loro perpendicolari.

(6 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA