

Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



M 1 1 1 4 0 2 1 2 I

SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 2 ≡

**Sabato, 4 giugno 2011 / 90 minuti**

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.*

*Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 3 quesiti strutturati, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Le pagine 10, 11 e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 12 pagine, di cui 1 bianca e 3 di riserva.*

## Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,  $r = \frac{A}{p}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:  

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:  

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$
- Teoremi di addizione:  

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:  

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:  

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
- Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :  

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a > b$
- Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a$  è il semiasse reale.
- Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:  

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

# Pagina bianca

**VOLTATE IL FOGLIO.**

01. Sono date le funzioni  $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{2x^2 + 1}$  e  $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ .

a) Scrivete la funzione inversa  $g^{-1}$  della funzione  $g$ .

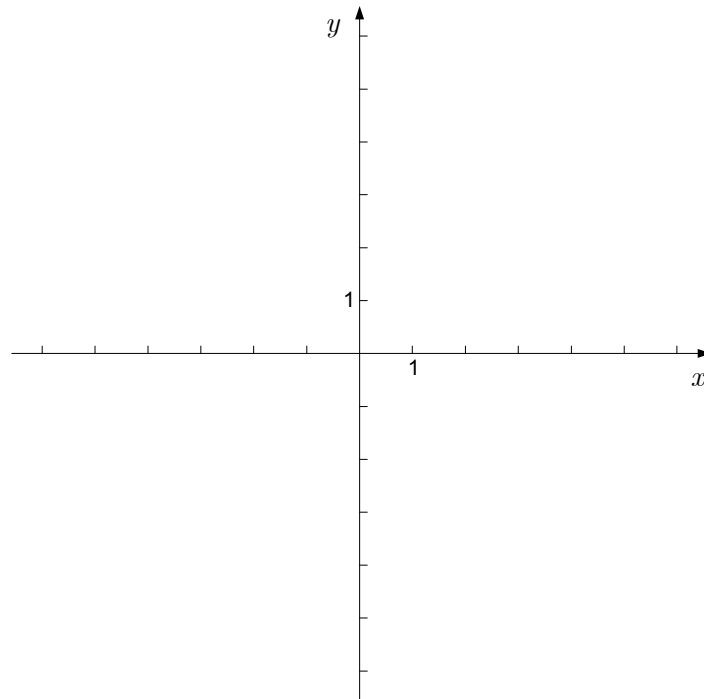
(2 punti)

b) Sia  $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Dimostrate che  $h(x) = \frac{3x^2 - 3}{2x^2 + 1}$ .

(2 punti)

c) Calcolate gli zeri, l'estremo e l'asintoto orizzontale della funzione  $h(x) = \frac{3x^2 - 3}{2x^2 + 1}$  e tracciate il grafico della funzione nel sistema coordinato dato.

(5 punti)



d) Scrivete l'insieme dei numeri reali  $x$  per i quali vale che  $2g(x) - 3 \leq h(x)$ .

(6 punti)



02. È data la successione di termine generale  $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Dimostrate con il calcolo che il numero 1,97 non è un termine di tale successione.

(3 punti)

b) Calcolate il limite della successione.

(4 punti)

c) Quali termini non appartengono all'intorno di raggio  $\varepsilon$  e centro 2 se  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ?

Scrivete la risposta.

(4 punti)



03. La circonferenza  $K$  ha il centro nel punto  $S(5,10)$  e tangente l'asse delle ordinate (asse  $y$ ). La retta di equazione  $y = 7x$  interseca la circonferenza  $K$  nei punti  $A$  e  $B$ .
- a) Scrivete l'equazione della circonferenza  $K$  e calcolate le coordinate dei punti  $A$  e  $B$ .  
(5 punti)
- b) Dimostrate che l'angolo  $ASB$  è retto.  
(3 punti)
- c) Dall'origine del sistema coordinato tracciamo le due rette tangenti alla circonferenza  $K$ . Una delle due tangenti è l'asse delle ordinate. Scrivete l'equazione della seconda retta tangente e calcolate le coordinate del suo punto di tangenza alla circonferenza  $K$ .  
(6 punti)





PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA