



Codice del candidato:

--

**Državni izpitni center**



SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 2 ≡

**Sabato, 8 giugno 2013 / 90 minuti**

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello. Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una "x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3	4

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 12 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, di cui 5 riserva.*



## Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n$  è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ,  $a > b$

Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ,  $a$  è il semiasse reale

Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli:  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

**Il problema 1 è obbligatorio.**

1. Risolvete il problema senza usare la calcolatrice.

È data la funzione  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ .

- 1.1. Scrivete l'insieme di definizione e tracciate il grafico della funzione  $f$ .

(4 punti)

- 1.2. Calcolate la tangente dell'angolo tra il grafico della funzione  $f$  e la retta  $y = x$  nel punto d'intersezione di ascissa positiva.

(4 punti)

- 1.3. Calcolate con esattezza l'area della figura delimitata dal grafico della funzione  $f$  e dalle rette  $x = 1$ ,  $x = 5$ ,  $y = 0$  e  $y = x$ .

(4 punti)

- 1.4. Individuate i punti del grafico della funzione  $f$  che distano dall'asintoto orizzontale della funzione di  $\frac{9}{40}$ .

(4 punti)



**Il problema 2 è obbligatorio.**

2. È dato un cono circolare retto con il raggio della base di 3 cm e l'altezza di 4 cm .
- 2.1. Calcolate il valore esatto dell'area della superficie totale del cono. *(3 punti)*
- 2.2. Inscriviamo nel cono una piramide retta a base quadrata (la base della piramide è inscritta nella base del cono). Calcolate il volume della piramide. *(3 punti)*
- 2.3. Circoscriviamo al cono dato una sfera. Calcolate il suo raggio. *(3 punti)*
- 2.4. Intersechiamo il cono con due piani perpendicolari tra loro e che passano attraverso l'asse del cono in modo da dividerlo in quattro parti uguali. Calcolate l'area della superficie di una delle parti. Il risultato sia esatto. (L'asse del cono è la retta che passa attraverso il suo vertice e il centro della base.) *(3 punti)*



**Il problema 3 è a scelta. I problemi 3 e 4 sono a scelta. Indicate il problema scelto nella prima pagina della prova d'esame.**

3. Risolvete i quesiti seguenti riguardanti la divisibilità:

3.1. Verificate con il calcolo se il polinomio  $2x^3 - x - 14$  è divisibile per  $x - 2$ . Scrivete la risposta.

*(3 punti)*

3.2. Dimostrate che la somma di quattro potenze del numero 5 i cui esponenti sono numeri naturali successivi è divisibile per 26.

*(3 punti)*

3.3. Dimostrate per induzione matematica che  $3 \mid (n^3 + 5n)$  per ogni numero naturale  $n$ .

*(6 punti)*





**Il problema 4 è a scelta. I problemi 3 e 4 sono a scelta. Indicate il problema scelto nella prima pagina della prova d'esame.**

4. Risolvete i quesiti relativi alle successioni:

4.1. I lati di un triangolo rettangolo formano una successione aritmetica di ragione 3. Calcolate i lati del triangolo.

*(2 punti)*

4.2. Dimostrate che l'equazione  $ax^2 + 2bx + c = 0$  ha soluzioni reali se i coefficienti reali  $a, b, c$  sono i termini successivi di una successione aritmetica.

*(3 punti)*

4.3. Quante soluzioni ha l'equazione  $ax^2 + 2bx + c = 0$  se i coefficienti reali  $a, b, c$  sono i termini successivi di una successione geometrica?

*(3 punti)*

4.4. In una successione di quattro numeri reali i primi tre formano una successione geometrica, gli ultimi tre invece una successione aritmetica. La somma del primo e dell'ultimo numero è 14, la somma dei due numeri centrali è 12. Calcolate i quattro numeri.

*(4 punti)*



PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA