



Codice del candidato:

--

Državni izpitni center



M 1 5 1 4 0 2 1 2 1

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 2 ≡

Sabato, 6 giugno 2015 / 90 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello. Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una "x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3	4

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 12 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 5 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, a è il semiasse reale

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$



Il quesito strutturato 1 è obbligatorio.

1. Risolvete i seguenti esercizi:

1.1. Ruotiamo un rettangolo di lati $a = 5$ e $b = 3$ attorno al lato a . Calcolate l'area della superficie totale e il volume del corpo così ottenuto. Il risultato sia esatto.

(3 punti)

1.2. Il triangolo ABC di lati $a = 13$, $b = 20$ e $c = 21$ viene ruotato attorno al lato c . Calcolate l'area della superficie totale del solido di rotazione così ottenuto. Il risultato sia esatto.

(6 punti)

1.3. Ruotiamo la curva di equazione $y = 4 - x^2$ nell'intervallo $[-2, 2]$ attorno all'asse delle ascisse. Calcolate il volume del solido di rotazione così ottenuto. Il risultato sia esatto.

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.

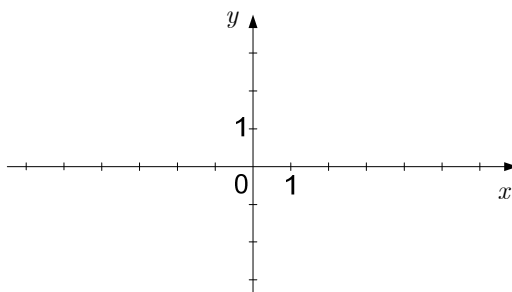




Il quesito strutturato 2 è obbligatorio.

2. È data la funzione razionale $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

2.1. Nel sistema di coordinate dato tracciate la curva $y = f(x)$. Scrivete la dipendenza della funzione inversa f^{-1} e l'insieme di definizione della funzione f^{-1} .



(4 punti)

2.2. La retta $y = 8x + n$ intersechi la curva $y = f(x)$. Dimostrate che le ascisse delle intersezioni soddisfano l'equazione $8x^2 + (n+7)x + n + 1 = 0$.

(2 punti)

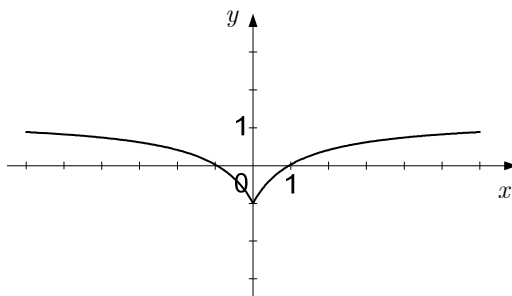
2.3. Calcolate per quali valori del parametro n la retta $y = 8x + n$ è tangente alla curva $y = f(x)$.

(3 punti)

2.4. Nella figura sottostante è disegnata una delle curve

$$y = f(x), \quad y = |f(x)|, \quad y = f(-x), \quad y = f(|x|), \quad y = -f(x).$$

Cerchiate l'equazione della curva disegnata nella figura. Calcolate l'area della figura delimitata dall'asse delle ascisse e dalla curva disegnata. Il risultato sia esatto.



(5 punti)

Non scrivete nel campo grigio.





Il quesito strutturato 3 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

3. In un'urna abbiamo 10 palline: 5 rosse, 3 azzurre e 2 bianche.
- 3.1. Estraiamo a caso dall'urna contemporaneamente 4 palline. Indicate la probabilità dei seguenti eventi:
 A – tutte le palline estratte sono rosse,
 B – due palline estratte sono rosse, due palline sono azzurre,
 C – almeno una pallina estratta è bianca.
(5 punti)
- 3.2. Dall'urna estraiamo a caso contemporaneamente 2 palline. Calcolate la probabilità dell'evento che ambedue le palline estratte siano azzurre, se sappiamo che almeno una di esse è azzurra.
(6 punti)
- 3.3. Dall'urna estraiamo tutte le palline e le mettiamo in fila una dopo l'altra a caso. Calcolate la probabilità dell'evento che in fila stiano assieme tutte e tre le palline azzurre.
(2 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 5 1 4 0 2 1 2 1 0 9



Il quesito strutturato 4 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

4. È data la funzione reale f con la dipendenza $f(x) = 2^x$.

4.1. Risolvete l'equazione $f(x) + f(2x) = f(x+2)$. Il risultato sia esatto.

(3 punti)

4.2. Dimostrate che vale $(f(1) + f'(1)) \cdot \ln 2 = f'(1) + f''(1)$.

(3 punti)

4.3. Calcolate la somma $\sum_{n=1}^{10} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.

(3 punti)

4.4. Quando converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$? Calcolate $x \in \mathbb{R}$ in modo che la somma di questa serie sia uguale a 1.

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.





PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA