Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

M16140212M

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK
TAVASZI VIZSGAIDŐSZAK

Višja raven
Emelt szint

MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Sobota, 4. junij 2016 / 90 minut
2016. június 4., szombat / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, žepno računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, zsebszámológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 20 strani, od tega 5 rezervnih in 3 prazne.
A feladatlap 20 oldalas, ebből 5 tartalék és 3 üres.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	**4.**

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 14 do 18 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg.Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	***4.***

Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a ***feladatlap*** *erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 14–18. oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmazniuk kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

V sivo polje ne pišite. / A szürke mezőbe ne írjon!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, a je realna polos

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integral: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Összegek szorzattá történő alakításának képletei:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

A szorzatok összeggé történő alakításának képletei:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

A $T_0(x_0, y_0)$ *pont távolsága az* $ax + by - c = 0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Az $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, a *a hiperbola valós tengelye*

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett függvény: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integrál: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

Prazna stran

Üres oldal

Naloga 1 je obvezna.

Az 1. feladat kötelező.

1. Dani sta funkciji s predpisom $f(x)=\cos(2x)+a$ in $g(x)=b\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$, $a\in\mathbb{R}$, $b>0$.

Adott két függvény a következő hozzárendelési szabállyal: $f(x)=\cos(2x)+a$ *és* $g(x)=b\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$, $a\in\mathbb{R}$, $b>0$.

1.1. V preglednico zapišite definicijski območji in zalogi vrednosti funkcij f in g.
Írja a táblázatba az f és g függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

Predpis funkcije *Hozzárendelési szabály*	Definicijsko območje *Értelmezési tartomány*	Zaloga vrednosti *Értékkészlet*
$f(x)=\cos(2x)+a$		
$g(x)=b\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$		

(3 točke/pont)

1.2. Določite vrednost parametrov a in b tako, da bosta imeli funkciji f in g presečišči pri $x_1=0$ in $x_2=\frac{\pi}{4}$.
Határozza meg az a és b paraméterek értékeit úgy, hogy az f és g függvények metszéspontjai az $x_1=0$ és $x_2=\frac{\pi}{4}$ értékeknél legyenek.

(4 točke/pont)

1.3. Naj bo $a=0$ in $b=\frac{16}{\pi^2}$. Izračunajte ploščino območja med grafoma funkcij f in g med presečiščema.
Legyen $a=0$ és $b=\frac{16}{\pi^2}$. Számítsa ki az f és g függvények grafikonjai által határolt síkidom területét a két metszéspont között!

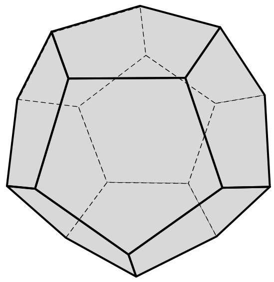
(6 točk/pont)

Naloga 2 je obvezna.

A 2. feladat kötelező.

2. Dodekaeder je pravilni polieder, omejen z 12 pravilnimi petkotniki. Na vsako ploskev napišemo po eno izmed števil od 1 do 12, ki se ne ponavljajo.

   A dodekaéder egy szabályos poliéder, amelyet 12 szabályos ötszög határol. Minden lapra ráírunk egy-egy számot 1-től 12-ig, amelyek nem ismétlődhetnek.



2.1. Hkrati zakotalimo dva oštevilčena dodekaedra. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da je vsota števil na obeh zgornjih ploskvah praštevilo, manjše ali enako 5?

Két ilyen megszámozott dodekaéderrel dobunk egyszerre. Mekkora annak az A eseménynek a valószínűsége, hogy a két legfelső lapon látható szám összege 5-nél kisebb vagy azzal egyenlő prímszám lesz?

(4 točke/pont)

2.2. En oštevilčeni dodekaeder zakotalimo 20-krat. Kolikšna je verjetnost dogodka B, da se bo v teh 20 ponovitvah poskusa število 7 pojavilo na zgornji ploskvi natanko 3-krat? Rezultat zaokrožite na tri decimalna mesta.

Egy ilyen megszámozott dodekaéderrel 20-szor dobunk. Mekkora annak a B eseménynek a valószínűsége, hogy a 20 dobás alatt a 7-es szám pontosan 3-szor jelenik meg a legfelső lapon? Az eredményt kerekítse három tizedesjegyre!

(4 točke/pont)

2.3. Naj bo dolžina roba dodekaedra enaka $a = 6$ cm. Izračunajte vsoto dolžin vseh robov in površino tega dodekaedra.

Legyen a dodekaéder élének hosszúsága $a = 6$ cm. Számítsa ki a dodekaéder összes élhosszúságának összegét és a felszínét!

(6 točk/pont)

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

A 3. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

3. Naj bo $\{a_n\}$ geometrijsko zaporedje s kvocientom $q = \mathrm{e}^2$ in prvim členom $a_1 = 1$. Naj bo dano še zaporedje s splošnim členom $b_n = \ln(a_n)$.

   Legyen az $\{a_n\}$ egy mértani sorozat, amelynek hányadosa $q = \mathrm{e}^2$, első tagja pedig $a_1 = 1$. Legyen adott továbbá a $b_n = \ln(a_n)$ általános tagú sorozat.

3.1. Zapišite splošni člen zaporedja $\{a_n\}$ in dokažite, da je zaporedje $\{b_n\}$ aritmetično z diferenco $d = 2$.
Írja fel a $\{a_n\}$ sorozat általános tagját, és bizonyítsa, hogy a $\{b_n\}$ sorozat a $d = 2$ különbségű számtani sorozat!

(4 točke/pont)

3.2. Izračunajte vsoto prvih 100 členov zaporedja $\{b_n\}$.
Számítsa ki a $\{b_n\}$ sorozat első 100 tagjának összegét!

(2 točki/pont)

3.3. Dokažite, da za poljuben par naravnih števil m, n velja, da b_m in b_n nista tuji si števili.
Bizonyítsa, hogy két tetszőleges m és n természetes számpár esetén fennáll, hogy a b_m és a b_n számok nem relatív prímek!

(3 točke/pont)

3.4. Naj bo za vsako naravno število n p_n polinom, definiran s predpisom $p_n(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + ... + b_{n+1}x^n$. Dokažite, da ima za vsako naravno število n polinom p_n na intervalu $[0, \infty)$ natanko eno ničlo.
Legyen minden n természetes szám esetén a p_n polinom a $p_n(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + ... + b_{n+1}x^n$ hozzárendelési szabállyal definiálva. Bizonyítsa, hogy minden n természetes szám esetén a p_n polinomnak a $[0, \infty)$ intervallumon pontosan egy zérushelye van!

(4 točke/pont)

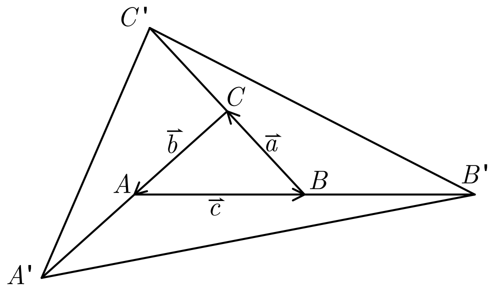
V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

A 4. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

4. V trikotniku ABC naj bo $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ in $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Točke A', B' in C' konstruiramo tako, da je $\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{CA'}=2\overrightarrow{CA}$.

Az ABC háromszögben legyen: $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ és $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Az A', B' és C' pontokat úgy szerkesztjük meg, hogy $\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA'}=2\overrightarrow{CA}$ fennálljon.



4.1. Izrazite vektorje $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ in $\overrightarrow{C'A'}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Fejezze ki a $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ és $\overrightarrow{C'A'}$ vektorokat a $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

(3 točke/pont)

4.2. Izračunajte ploščino in obseg trikotnika $B'BC'$, če je $|\vec{a}|=2$, $|\vec{c}|=3$ in kot CBB' meri $133°$. Rezultata zapišite na 4 mesta natančno.

Számítsa ki a $B'BC'$ háromszög területét és kerületét, ha $|\vec{a}|=2$, $|\vec{c}|=3$ és a CBB' szög nagysága $133°$. Mindkét eredményt 4 értékes számjegy pontossággal adja meg!

(7 točk/pont)

4.3. V kakšnem razmerju sta ploščini trikotnikov ABC in $A'B'C'$?

Milyen arányban vannak a ABC és a $A'B'C'$ háromszög területei?

(3 točke/pont)

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

M16140212M18

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

Prazna stran

Üres oldal

Prazna stran

Üres oldal