



Codice del candidato:

--

Državni izpitni center



M 1 7 1 4 0 2 1 2 1

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 2 ≡

Sabato, 3 giugno 2017 / 90 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.

Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una "x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3	4

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 12 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 5 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\text{Distanza del punto } T_0(x_0, y_0) \text{ dalla retta } ax + by - c = 0: \quad d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$\text{Ellisse: } e^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}, \quad a > b$$

$$\text{Iperbole: } e^2 = a^2 + b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}, \quad a \text{ è il semiasse reale}$$

$$\text{Parabola: } y^2 = 2px, \quad \text{fuoco } F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$\text{Compositum di funzioni: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{Formula di Bernoulli: } P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{Integrale: } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$



Il quesito strutturato 1 è obbligatorio.

1. Sono date le funzioni reali f e g espresse dalle dipendenze $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ e $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

1.1. Scrivete nella tabella l'insieme di definizione e l'insieme immagine delle funzioni f e g .

Dipendenza della funzione	Insieme di definizione	Insieme immagine
$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$		
$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$		

Dimostrate che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = f(x)$.

(5 punti)

1.2. Dimostrate che la funzione f è pari e che la funzione g è crescente.

(2 punti)

1.3. Dimostrate che la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $T(1, y_1)$ interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata e^{-1} .

(3 punti)

1.4. Calcolate l'integrale indefinito $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$.

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.





Il quesito strutturato 2 è obbligatorio.

2. Nel quesito tratteremo quattro trapezi, per tutti vale che le basi misurano $a = |AB| = 6$ cm e $c = |CD| = 4$ cm, la lunghezza del lato obliquo d è invece $d = |AD| = 5$ cm.
- 2.1. Nel primo trapezio le rette di sostegno dei lati obliqui si intersecano nel punto E . Calcolate la lunghezza del segmento DE .
(2 punti)
- 2.2. Nel secondo trapezio l'ampiezza dell'angolo $\beta = \sphericalangle ABC$ è uguale a 67° . Calcolate l'ampiezza dell'angolo $\alpha = \sphericalangle BAD$. Arrotondate il risultato al primo di grado.
(3 punti)
- 2.3. Nel terzo trapezio la diagonale BD misura 7 cm. Calcolate la lunghezza del lato obliquo $b = |BC|$.
(4 punti)
- 2.4. Nel quarto trapezio l'ampiezza dell'angolo $\alpha = \sphericalangle BAD$ è uguale a 60° . Sul lato AD si trova il punto T , sul lato AB invece il punto V e vale che $|AT| = |AV|$. Calcolate per quale lunghezza di $|AT|$ l'area del triangolo VBT sarà massima.
(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 7 1 4 0 2 1 2 1 0 7



Il quesito strutturato 3 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

3. Risolvete i quesiti seguenti.

3.1. Risolvete l'equazione $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

(5 punti)

3.2. Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'equazione $\tan x + \cot x = m$ ha soluzioni reali?

(4 punti)

3.3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $(4 - a)\sin x = 2a - 3$ ha soluzioni reali?

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.





Il quesito strutturato 4 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

4. Il piccolo Simon, che non sa ancora né leggere né scrivere, sta giocando con la macchina da scrivere del nonno. Questa ha 40 tasti della stessa grandezza sui quali ci sono dei segni: 25 lettere maiuscole dell'alfabeto sloveno, 10 cifre e 5 simboli.
- 4.1. Simon preme alla cieca su uno dei tasti. Qual è la probabilità dell'evento A , che premerà una delle lettere che compongono il suo nome?
(3 punti)
- 4.2. Simon batte alla cieca su 5 segni. Qual è la probabilità dell'evento B , che abbia scritto il suo nome? Qual è la probabilità dell'evento C , che abbia scritto tutte le lettere del suo nome?
(4 punti)
- 4.3. Simon batte alla cieca su 3 segni. Qual è la probabilità dell'evento D , che abbia battuto tre cifre uguali se sappiamo che ha premuto per primo il tasto con una cifra pari?
(3 punti)
- 4.4. Simon batte alla cieca su 12 segni. Qual è la probabilità dell'evento E , che abbia battuto esattamente dieci volte una lettera dell'alfabeto sloveno?
(3 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 7 1 4 0 2 1 2 1 1 1



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA