Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

JESENSKI IZPITNI ROK
ŐSZI VIZSGAIDŐSZAK

M 1 7 2 4 0 2 1 2 M

Višja raven
Emelt szint
MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Petek, 25. avgust 2017 / 90 minut
2017. augusztus 25., péntek / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, számológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 20 strani, od tega 5 rezervnih in 3 prazne.
A feladatlap 20 oldalas, ebből 5 tartalék és 3 üres.

M 1 7 2 4 0 2 1 2 M 0 2

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 14 do 18 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg.Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	*4.*

*Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a **feladatlap** erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 14–18. oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmazniuk kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1,\ v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S},\ r = \frac{S}{s},\ s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\ \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},\ \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$:

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a},\ a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a}$, a je realna polos

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integral: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Összegek szorzattá történő alakításának képletei:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\cos y}$

A szorzatok összeggé történő alakításának képletei:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

A $T_0(x_0, y_0)$ *pont távolsága az* $ax + by - c = 0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Az $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, a *a hiperbola valós féltengelye*

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett (kompozítum) függvény: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrál: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\tan\frac{x}{a} + C$

V sivo polje ne pišite. / A szürke mezőbe ne írjon!

Prazna stran
Üres oldal

Naloga 1 je obvezna.

Az 1. feladat kötelező.

1. Dana je kvadratna enačba $(2m^2+3)x^2+(3m^2-2)x+m^2-5=0$ z neznanko x in realnim parametrom m.

   Adott az x ismeretlenű és m valós paraméterű $(2m^2+3)x^2+(3m^2-2)x+m^2-5=0$ másodfokú egyenlet.

   1.1. Dokažite, da ima enačba realne rešitve za vse vrednosti parametra m.
   Bizonyítsa be, hogy az egyenletnek van valós megoldása az m paraméter minden értéke esetén!

   (3 točke/pont)

   1.2. Izračunajte rešitvi enačbe. Določite vse vrednosti parametra m, za katere sta obe rešitvi negativni.
   Számítsa ki az egyenlet mindkét megoldását! Határozza meg az m paraméter összes olyan értékét, amelyre az egyenlet mindkét megoldása negatív!

   (6 točk/pont)

   1.3. Za katere vrednosti parametra m je vsota rešitev enačbe najmanjša? Izračunajte rešitvi v tem primeru.
   Az m paraméter mely értékeire lesz a megoldások összege a lehető legkisebb? Számítsa ki a megoldásokat ebben az esetben!

   (4 točke/pont)

Naloga 2 je obvezna.

A 2. feladat kötelező.

2. Rešite naslednje naloge iz zaporedij.

   Oldja meg az alábbi, sorozatokról szóló feladatokat!

2.1. Trije zaporedni členi naraščajočega geometrijskega zaporedja imajo vsoto 52. Če prvemu členu prištejemo 1, drugemu 8, tretjega pa zmanjšamo za 1, dobimo zaporedne člene aritmetičnega zaporedja. Izračunajte prve tri člene obeh zaporedij. (Uganjene rešitve ne bodo točkovane.)

Egy növekvő mértani sorozat három egymást követő tagjának 52 az összege. Ha az első taghoz hozzáadunk 1-et, a másodikhoz pedig 8-at, valamint a harmadik tagot csökkentjük 1-gyel, akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Számítsa ki mindkét sorozat első három tagját! (Amennyiben a megoldást csak kitalálja, nem fog pontot kapni.)

(6 točk/pont)

2.2. Notranji koti trikotnika α, β in γ so zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Dokažite, da za stranice a, b in c tega trikotnika velja zveza $a^2 - ac + c^2 = b^2$.

A háromszög α, β és γ belső szögei egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

Bizonyítsa be, hogy a háromszög a, b és c oldalaira fennáll az $a^2 - ac + c^2 = b^2$ összefüggés!

(3 točke/pont)

2.3. Izračunajte vse vrednosti parametra $m,\ m > 0$, da bodo rešitve enačbe $x^4 - (1+m^2)x^2 + m^2 = 0$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

Számítsa ki az $m,\ m > 0$ paraméter értékét minden olyan esetre, amelyben az $x^4 - (1+m^2)x^2 + m^2 = 0$ egyenlet megoldásai egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

(5 točk/pont)

M 1 7 2 4 0 2 1 2 M 1 0

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

A 3. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

3. Dana je funkcija $f:\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=2\ln x$.

Adott az $f(x)=2\ln x$ hozzárendelési szabályú $f:\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ függvény.

3.1. Rešite enačbo $2f(x)=f(2x)$.

Oldja meg a $2f(x)=f(2x)$ egyenletet!

(3 točke/pont)

3.2. Dokažite, da je $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Bizonyítsa be, hogy $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$!

(3 točke/pont)

3.3. Dokažite z matematično (popolno) indukcijo, da za vsako naravno število n velja $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n+1}\right)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Bizonyítsa teljes indukcióval, hogy minden n természetes számra fennáll az $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n+1}\right)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ összefüggés!

(4 točke/pont)

3.4. Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergentna? Odgovor utemeljite.

Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right)$ sor? Válaszát indokolja meg!

(3 točke/pont)

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

A 4. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

4. Bazna vektorja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ določata paralelogram $ABCD$.

   Az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ bázisvektorok meghatározzák az $ABCD$ paralelogrammát.

4.1. Naj bosta $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x-1,\ 1)$ in $\overrightarrow{AD} = \vec{b} = \left(2,\ \sqrt{x-1}\right)$. Pri kateri vrednosti spremenljivke x paralelogram postane pravokotnik?

Legyenek $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x-1,\ 1)$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b} = \left(2,\ \sqrt{x-1}\right)$. Az x változó mely értékeire válik a paralelogramma téglalappá?

(4 točke/pont)

4.2. Na stranici BC leži točka E tako, da velja $\left|\overrightarrow{BE}\right| : \left|\overrightarrow{EC}\right| = 1:3$. Točka F razpolavlja stranico CD, daljici AE in BF se sekata v točki S. Izračunajte razmerje $|AS|:|SE|$.

A BC oldalra illeszkedik az E pont úgy, hogy fennáll: $\left|\overrightarrow{BE}\right| : \left|\overrightarrow{EC}\right| = 1:3$. Az F pont felezi a CD oldalt, az AE és BF szakaszok az S pontban metszik egymást. Számítsa ki az $|AS|:|SE|$ arányt!

(5 točk/pont)

4.3. Izračunajte dolžino vektorja $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = 4$, $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = 7$ in $|\vec{a}| < \left|\vec{b}\right|$. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ meri $60°$.

Számítsa ki a $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vektor hosszúságát, ha je $|\vec{a}| = 4$, $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = 7$ és $|\vec{a}| < \left|\vec{b}\right|$. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor által közbezár szög $60°$-os.

(4 točke/pont)

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

M 1 7 2 4 0 2 1 2 M 1 4

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

Prazna stran

Üres oldal

M17240212M20

Prazna stran

Üres oldal

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*