



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE PRIMAVERILE

Livello di base
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 1 ≡

Sabato, 9 giugno 2018 / 120 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.

Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, se $a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$



1. Nella tabella sottostante sono date delle proposizioni. Determinate i loro valori logici, e nelle colonne sotto Valore della proposizione cerciate 1 se la proposizione è vera, oppure 0 se la proposizione è falsa. Seguite l'esempio risolto nella prima riga.

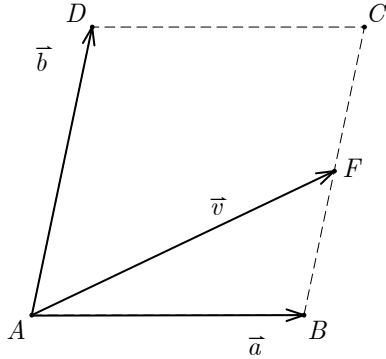
Proposizione	Valore della proposizione	
	1	0
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale che $(-a^2)^3 = a^6$.	1	0
I numeri 8 e 15 sono due numeri primi fra loro.	1	0
Il numero $(2^{10} + 2^{11})$ è multiplo del numero 3.	1	0
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale che $ a = a$.	1	0
$i^{2018} = 1$	1	0
Per due numeri qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.	1	0
Esistono due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.	1	0

(6 punti)



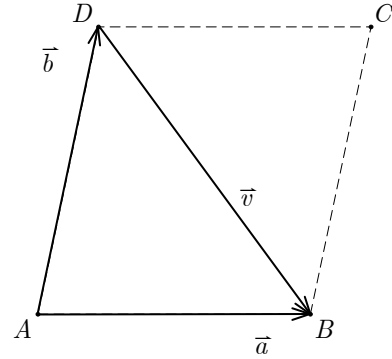
2. In ognuna delle figure sottostanti sono rappresentati il parallelogramma $ABCD$ e i vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{v} . I punti E , F e G sono i punti medi dei lati, il punto S è il punto d'intersezione delle diagonali. Sotto ogni parallelogramma scrivete il vettore \vec{v} come combinazione lineare dei vettori \vec{a} e \vec{b} . Seguite l'esempio risolto.

Esempio risolto



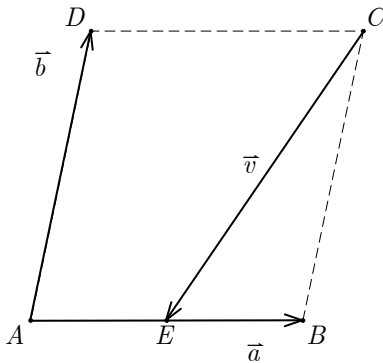
$$\vec{v} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

2.1.



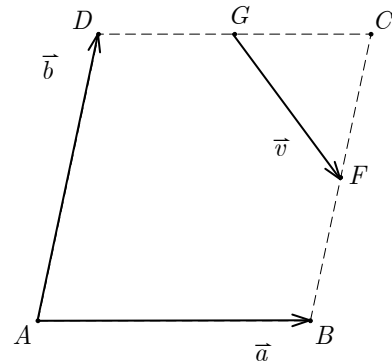
$$\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.2.



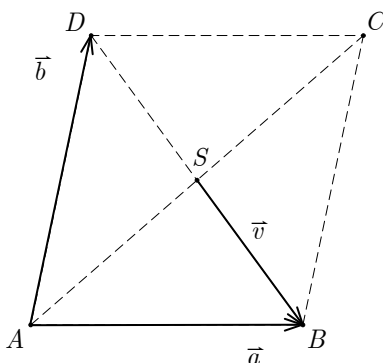
$$\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.3.



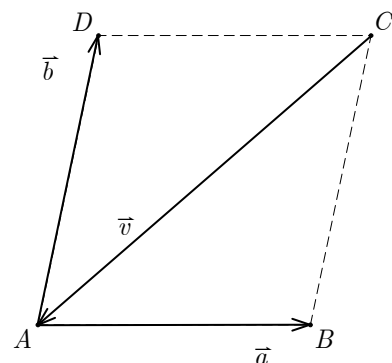
$$\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.4.



$$\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.5.



$$\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(5 punti)



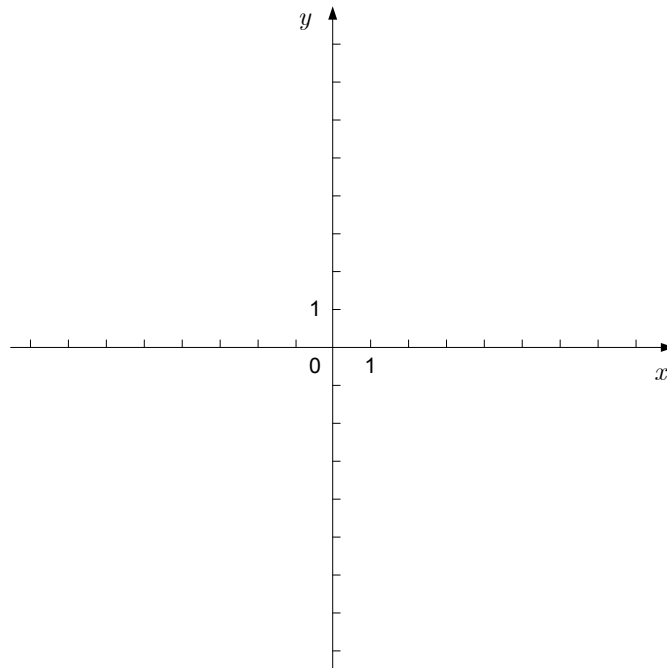
3. È data la successione aritmetica $11, \frac{47}{4}, \frac{25}{2}, \dots$. Calcolate il tredicesimo termine e la somma dei primi tredici termini di tale successione. Quanti termini della successione sono minori di 1000? Scrivete la risposta.

(7 punti)



4. È data la funzione f espressa dalla dipendenza $f(x) = \frac{2}{x}$.

4.1. Tracciate il grafico della funzione f .



4.2. Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto d'ascissa $x_0 = \frac{1}{2}$. (2)

(4)
(6 punti)



5. Sia $\mathbb{N}_{20} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

5.1. Dall'insieme \mathbb{N}_{20} scegliamo a caso un numero. Calcolate la probabilità degli eventi:

A – è stato scelto un numero divisibile per 3.

B – è stato scelto un numero divisibile per 2 e per 3.

(4)

5.2. Dall'insieme \mathbb{N}_{20} scegliamo due numeri. Calcolate la probabilità dell'evento

C – almeno uno dei due numeri scelti è divisibile per 3.

(3)

(7 punti)



6. Sono dati i polinomi p e q espressi dalle dipendenze $p(x) = x^3 + 2x$ e $q(x) = -2x^2 - 1$. Risolvete l'equazione $p(x) = q(x)$ nell'insieme dei numeri complessi. Dimostrate che ogni soluzione dell'equazione $p(x) = q(x)$ ha il valore assoluto uguale a 1.

(7 punti)



7. Le espressioni contenute nella colonna di sinistra della tabella esprimono le dipendenze di alcune funzioni. La colonna di destra indica, con le lettere dalla A alla L, le espressioni corrispondenti alle rispettive dipendenze delle funzioni. Inserite le lettere nella colonna di destra della tabella in modo che le due funzioni risultino uguali in ciascuna riga. Seguite l'esempio risolto.

$\cos(-x)$	F
$\cos(2x)$	
$\tan x$	
$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$	
$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	
$\operatorname{sen}(2\pi - x)$	

A: $\operatorname{sen}(2x)$

B: $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

C: $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

D: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

E: $-\cos x$

F: $\cos x$

G: $\operatorname{sen} x$

H: $-\operatorname{sen} x$

I: $\tan x + \cot x$

J: 1

K: 0

L: $\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}$

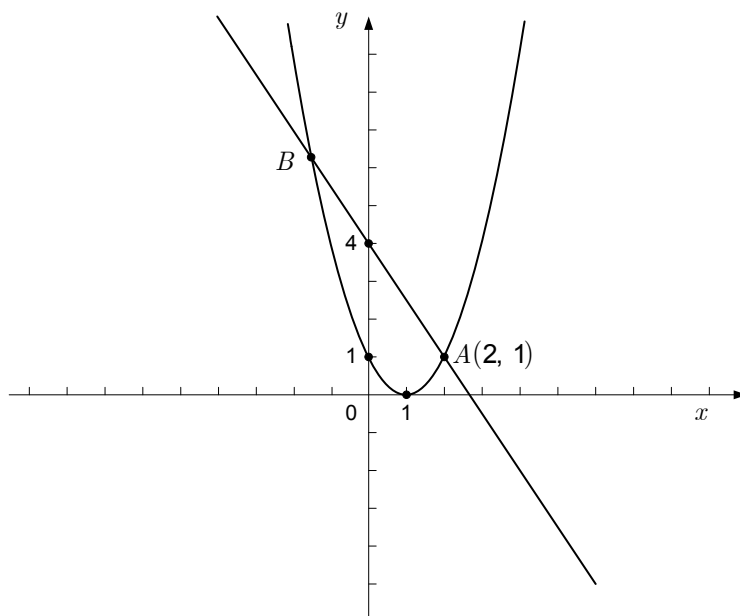
(6 punti)



8. È dato il rettangolo $ABCD$ di vertici $A(-3, -2)$, $B(3, -2)$, $C(3, 2)$ e $D(-3, 2)$.
- 8.1. Scrivete l'equazione dell'ellisse centrata all'origine, inscritta al rettangolo $ABCD$ e tangente a tutti e quattro i suoi lati. (3)
- 8.2. Scrivete l'equazione dell'iperbole centrata all'origine con un vertice nel punto $T(0, 2)$ e i cui asintoti sono le rette di sostegno delle diagonali del rettangolo $ABCD$. (2)
- 8.3. Scrivete l'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto C e passa per il punto A . (3)
- (8 punti)



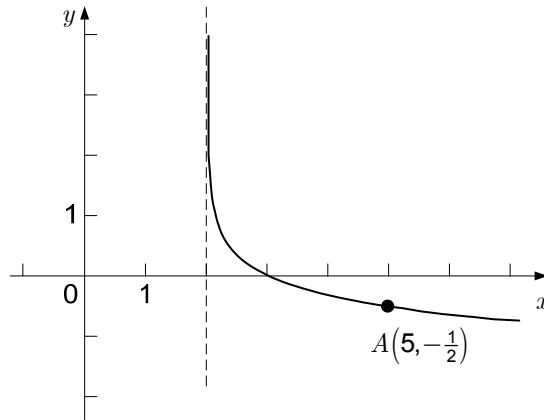
9. Klemen ha provato a determinare graficamente i punti d'intersezione della retta con la parabola, ma non ci è riuscito perché non ha potuto leggere esattamente le coordinate del punto B (vedi figura). Scrivete le equazioni della retta e della parabola della figura e calcolate le coordinate del punto B . Scrivete il punto B .



(7 punti)



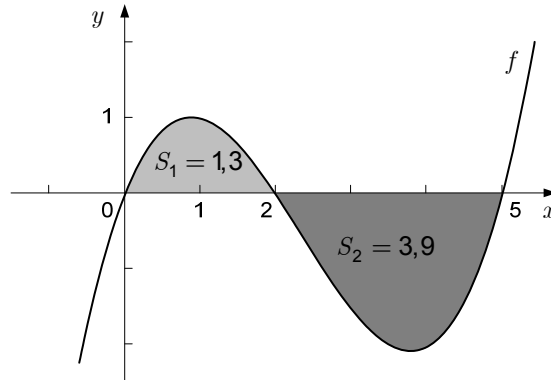
10. La figura mostra il grafico della funzione logaritmica f espressa dalla dipendenza $f(x) = a \log_{\frac{1}{3}}(x+b)$, il suo asintoto verticale di equazione $x=2$ e il punto A che appartiene al grafico della funzione f . Determinate i numeri reali a e b e calcolate per quale valore di $x_0 \in \mathbb{R}$ il valore della funzione f è uguale a $-\frac{5}{2}$.



(6 punti)



11. La figura mostra il grafico della funzione continua f che ha esattamente tre zeri: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 5$. L'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione f e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, 2]$ è $S_1 = 1,3$. L'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione f e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[2, 5]$ è $S_2 = 3,9$ (vedi figura).



Leggete dalla figura o calcolate gli integrali definiti:

$$\int_0^2 f(x) dx =$$

$$\int_2^5 f(x) dx =$$

$$\int_0^5 f(x) dx =$$

$$\int_0^2 4f(x) dx =$$

$$\int_2^5 (f(x) + 2x^2) dx =$$

$$\int_1^3 f(x-1) dx =$$

(8 punti)



12. Il negozio A e il negozio B vendono cherosene su ordinazione, facendo pagare in aggiunta il costo del trasporto. I prezzi di un litro di cherosene e del trasporto sono riportati nella tabella sottostante. In ambedue i negozi, il prezzo per il trasporto non dipende né dalla quantità di cherosene acquistato né dalla distanza.

	Negozio A	Negozio B
Prezzo al litro del cherosene	0,811 €	0,795 €
Prezzo del trasporto	36 €	51 €

- 12.1. Jure ha un serbatoio per il cherosene a forma di parallelepipedo di larghezza 8 dm, lunghezza 17 dm e altezza 12,5 dm. Con delle misurazioni, Jure ha constatato che il cherosene in esso ancora contenuto raggiunge l'altezza di 3 dm. Jure intende acquistare del cherosene in modo da riempire il serbatoio fino all'orlo. In quale dei due negozi, tra A o B, a Jure converrà acquistare il cherosene per poter pagare l'importo minore, includendo anche il costo del trasporto? Quanto pagherà? Scrivete la risposta.
- 12.2. Per quale quantità di cherosene l'importo complessivo da pagare, compreso il trasporto, sarà uguale per i due negozi? In quale negozio l'acquisto del cherosene risulterà più conveniente per una quantità maggiore di cherosene, e in quale invece per una quantità minore di cherosene?

(5)

(2)
(7 punti)



PAGINA DI RISERVA