Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 1 8 1 4 0 2 1 2

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Višja raven

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Sobota, 9. junij 2018 / 90 minut

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo).
Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 12 do 16 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 16 strani, od tega 5 rezervnih.

M 1 8 1 4 0 2 1 2 0 2

Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia

V sivo polje ne pišite.

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integral: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Naloga 1 je obvezna.

1. Dana je funkcija f, za katero velja, da je $f(2x-1)=\dfrac{x-1}{x^2+x}$ za poljuben $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$.

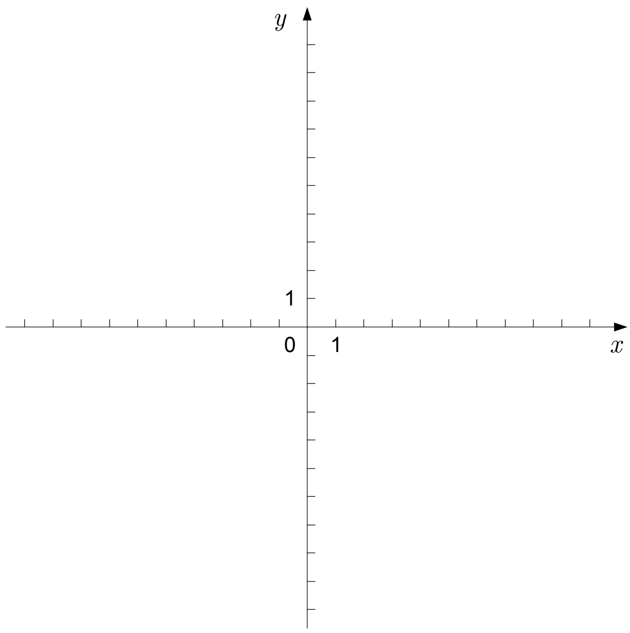
   1.1. Dokažite, da funkcijo f lahko podamo s predpisom $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4x+3}$.

   (2 točki)

   1.2. Izračunajte, v katerih vrednostih spremenljivke x ima funkcija f stacionarne točke.

   (4 točke)

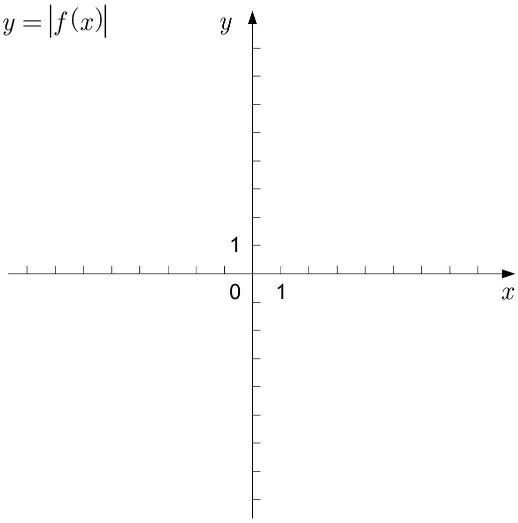
   1.3. Določite vse ničle in pole funkcije f. Narišite graf funkcije f in zapišite enačbo njegove vodoravne asimptote.



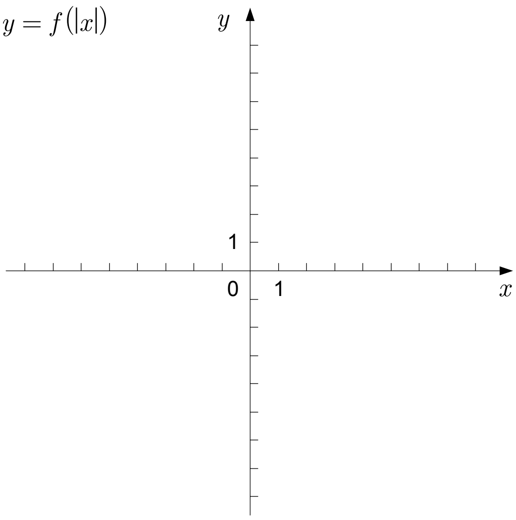
(6 točk)

   1.4. Narišite krivulji, dani z enačbama $y=|f(x)|$ in $y=f(|x|)$.

$y=|f(x)|$



$y=f(|x|)$



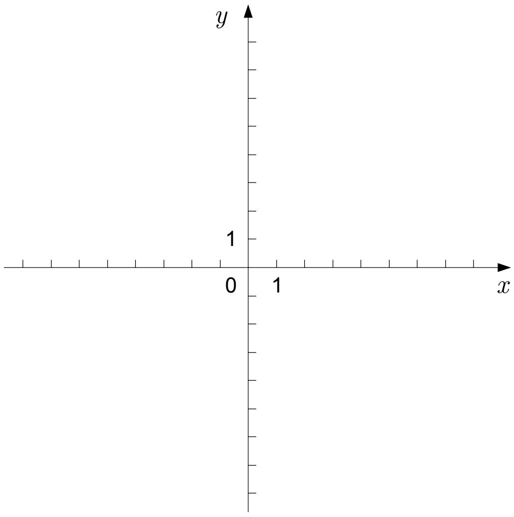
(2 točki)

M 1 8 1 4 0 2 1 2 0 6

Naloga 2 je obvezna.

2. Rešite naloge o množicah točk v ravnini.

2.1. V koordinatnem sistemu ponazorite množico točk
$A = \{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (|x-3| < 2) \wedge (y > -1) \wedge (x + y < 6)\}$.

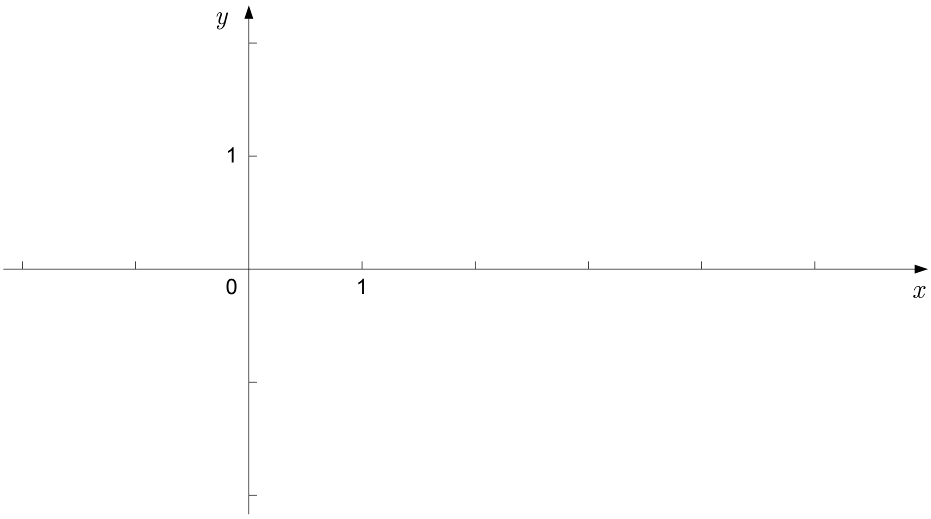


(4 točke)

2.2. Izračunajte ploščino območja $B = \{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (|x-3| \le 2) \wedge (y \ge -1) \wedge (x + y \le 2018)\}$.

(3 točke)

2.3. V koordinatnem sistemu ponazorite množici točk
$C_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x-1)^2 + y^2 = 2^{-2}\}$ in
$C_2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x-2)^2 + y^2 = 2^{-3}\}$.



(2 točki)

2.4. Za vsako naravno število n je $D_n = \{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x-n)^2 + y^2 \le 2^{-n-1}\}$. Izračunajte ploščino območja $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots \cup D_n \cup \ldots$.

(4 točke)

V sivo polje ne pišite.

M 1 8 1 4 0 2 1 2 0 7

M 1 8 1 4 0 2 1 2 0 8

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

3. Realno zaporedje je podano rekurzivno: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 2$ in $a_2 = 3$.

3.1. S popolno indukcijo dokažite, da za poljubno naravno število n velja $a_n = n+1$.

(3 točke)

3.2. Izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{a_n}}{3^{a_n}}$.

(4 točke)

3.3. Izračunajte limite:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}$,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{a_n x}$, kjer je $x \neq 0$,

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{a_n x}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

(6 točk)

M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 0

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

4. V predavalnici je 40 stolov, ki so razdeljeni v 5 vrst tako, da je v vsaki vrsti enako število stolov. Na stole se naključno posede 8 študentov matematike: Maja, Eva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka in France.

   4.1. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
   A – prva vrsta ostane prazna,
   B – v prvi vrsti so zasedeni natanko 3 stoli,
   C – vsi študenti so se posedli v isto vrsto.

   (7 točk)

   Maja, Eva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka in France ob popoldnevih igrajo družabne igre. Vsak natanko enkrat vrže pošteno igralno kocko.

   4.2. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
   D – nihče ne vrže šestice,
   E – natanko dva vržeta šestico,
   F – vsaj dva vržeta šestico in
   H – šestico vržeta samo Maja in France.

   (6 točk)

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN