Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 1 8 2 4 0 2 1 2

JESENSKI IZPITNI ROK

Višja raven

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Ponedeljek, 27. avgust 2018 / 90 minut

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo).
Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 12 do 16 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 16 strani, od tega 5 rezervnih.

© Državni izpitni center
Vse pravice pridržane.

M 1 8 2 4 0 2 1 2 0 2

Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{S}{s}$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$, $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left| \dfrac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$:

$S = \dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

M 1 8 2 4 0 2 1 2 0 4

V sivo polje ne pišite.

Naloga 1 je obvezna.

1. Dana je funkcija f s predpisom $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

1.1. Zapišite definicijsko območje funkcije f in izračunajte $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(3 točke)

1.2. Izračunajte abscise vseh presečišč grafa funkcije f in grafa funkcije g s predpisom $g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

(3 točke)

1.3. Dokažite, da funkcija f nima lokalnih ekstremov. Zapišite vse intervale naraščanja funkcije f.

(4 točke)

1.4. Dokažite, da je ploščina območja med grafom funkcije f, abscisno osjo in premicama z enačbama $x=\dfrac{\pi}{6}$ in $x=\dfrac{\pi}{3}$ enaka $\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}$. Nalogo rešite brez uporabe računala.

(4 točke)

V sivo polje ne pišite.

M 1 8 2 4 0 2 1 2 0 6

Naloga 2 je obvezna.

2. Rešite naslednje naloge iz kompleksnih števil.

2.1. Kompleksna števila $z_1 = 1$, $z_2 = 1+\mathrm{i}$, $z_3 = 1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$ in $z_4 = 1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3$ so oglišča štirikotnika v kompleksni ravnini. Izračunajte volumen telesa T_1, ki nastane, če ta lik zavrtimo za $360°$ okoli njegove stranice. Izračunajte volumen telesa T_2, ki nastane, če ta lik zavrtimo za $360°$ okoli njegove diagonale.

(4 točke)

2.2. Izračunajte $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^3\cdot\ldots\cdot\mathrm{i}^{1000}$.

(3 točke)

2.3. Za vsako naravno število n izračunajte $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\ldots+\mathrm{i}^n$.

(4 točke)

2.4. Naključno izberemo naravno število $1 \le n \le 2018$. Izračunajte verjetnost dogodka A, da velja $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\ldots+\mathrm{i}^n = 0$.

(2 točki)

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

M 1 8 2 4 0 2 1 2 0 8

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

3. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je vsota prvih n členov zaporedja enaka $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = -2n^2 + 24n$.

3.1. Dokažite, da je splošni člen zaporedja $a_n = 26 - 4n$. Dokažite, da je zaporedje aritmetično.

(4 točke)

3.2. Najmanj koliko členov je potrebno sešteti, da je vsota S_n negativna? Zapišite odgovor.

(3 točke)

3.3. Za kateri $n \in \mathbb{N}$ je vrednost S_n največja? Kolikšna je v tem primeru vrednost S_n?

(2 točki)

3.4. Naj bo dano zaporedje s splošnim členom $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Koliko členov zaporedja $\{b_n\}$ leži zunaj ε-okolice limite, če je $\varepsilon = 0{,}01$? Zapišite odgovor.

(4 točke)

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

M 1 8 2 4 0 2 1 2 1 0

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

4. Štirikotnik je ortodiagonalen, če se njegovi diagonali sekata pod pravim kotom. Ploščina poljubnega ortodiagonalnega štirikotnika z dolžinama diagonal e in f je enaka $S=\frac{ef}{2}$.
Naj bodo $A(1, 0)$, $D(0,-1)$, $B(x_1, y_1)$, $y_1>0$ in $C(x_2, y_2)$ take točke na enotski krožnici, da je štirikotnik $ABCD$ trapez z osnovnicama AB in CD. Diagonali trapeza se sekata v točki P. Označimo z O izhodišče koordinatnega sistema in s φ velikost kota AOB.

4.1. Dokažite, da je trapez $ABCD$ enakokrak. Narišite skico.

(2 točki)

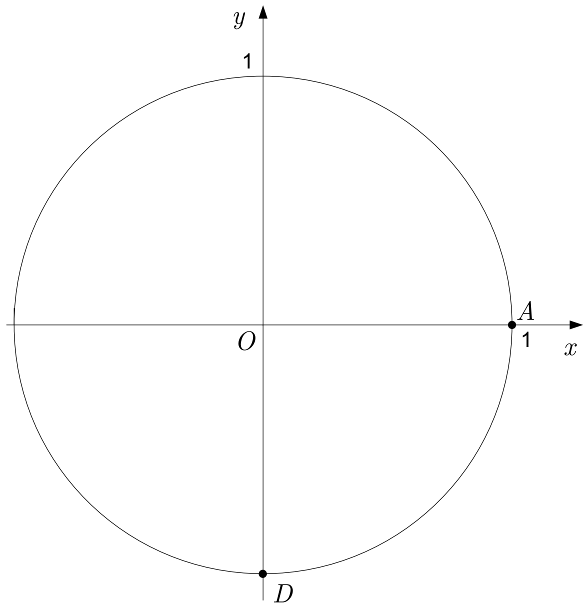
4.2. Izračunajte velikosti kotov $\sphericalangle DCA$, $\sphericalangle DBA$, $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle BDC$ ter dokažite, da je trapez $ABCD$ ortodiagonalen.

(5 točk)

4.3. Koordinati točke B ter dolžino diagonale $f=|BD|$ izrazite s φ.

(3 točke)

4.4. Ploščino trapeza $ABCD$ izrazite s φ. Katero točko B na enotski krožnici bi morali izbrati, da bi bila ploščina trapeza $ABCD$ največja? Odgovor utemeljite.



(3 točke)

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

REZERVNA STRAN

M 1 8 2 4 0 2 1 2 1 4

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

REZERVNA STRAN

M 1 8 2 4 0 2 1 2 1 6

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.