Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 1 9 1 4 0 2 1 2

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Višja raven

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Sobota, 8. junij 2019 / 90 minut

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo).
Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 12 do 16 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 16 strani, od tega 5 rezervnih.

V sivo polje ne pišite.

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$:

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2, \varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Naloga 1 je obvezna.

1. Nalogo rešite brez uporabe računala.
   Dana je hiperbola z enačbo $x^2 - y^2 = 1$.

   1.1. Izračunajte enačbi tangent na dano hiperbolo v točkah $D_1(\sqrt{2}, 1)$ in $D_2(\sqrt{2}, -1)$.

   (3 točke)

   1.2. Tangenta t z enačbo $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$ seka asimptoto z enačbo $y = x$ dane hiperbole v točki P. Naj bosta F_1 in F_2 gorišči dane hiperbole. Izračunajte točke P, F_1 in F_2 ter zapišite enačbo krožnice skozi te tri točke.

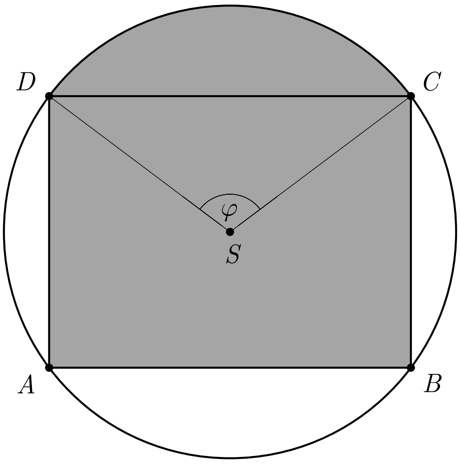
   (7 točk)

   1.3. Območje, ki ga omejujejo tangenta t z enačbo $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$, dana hiperbola in abscisna os, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Izračunajte volumen nastalega rotacijskega telesa.

   (4 točke)

Naloga 2 je obvezna.

2. Dana je krožnica s polmerom 6 in središčem S. Točke A, B, C in D rišemo na krožnico tako, da sta kota $\sphericalangle BAD$ in $\sphericalangle ABC$ prava kota (glejte na sliki eno izmed možnih narisanih situacij). Velikost kota $\sphericalangle CSD$ je odvisna od izbire položajev točk A, B, C in D na krožnici.



2.1. Dokažite, da je za poljubne tako narisane točke A, B, C in D ploščina osenčenega območja v odvisnosti od velikosti kota $\varphi = \sphericalangle CSD$ enaka $S(\varphi) = 54\sin\varphi + 18\varphi$, če je kot φ izražen v radianih.

(4 točke)

2.2. Za kateri topi kot $\varphi = \sphericalangle CSD$ je ploščina osenčenega območja največja? Kot zaokrožite na desetinko stopinje.

(4 točke)

2.3. Zgornja slika prikazuje tudi prerez predora z ravnino, ki je pravokotna na smer vožnje. Krožnica na sliki ima polmer 6 m, širina predora je $|AB| = 6$ m, njegova dolžina pa je 120 m. Ukrivljen strop in steni predora bodo prepleskali. V ta namen so kupili 400 ℓ barve. Ali bo barve dovolj, če za 40 m^2 porabijo natanko 5 ℓ barve? Zapišite odgovor in ga utemeljite.

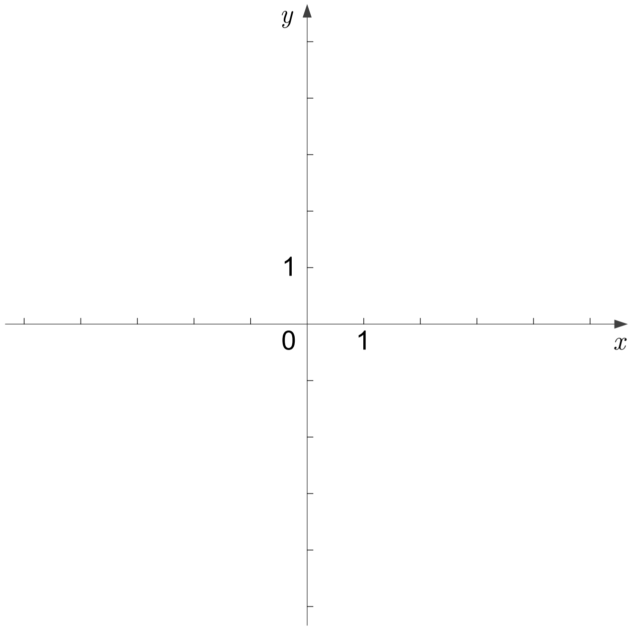
(6 točk)

M 1 9 1 4 0 2 1 2 0 8

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

3. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=2^{-\frac{x}{2}}$.

3.1. Narišite graf funkcije f.



(1 točka)

3.2. Izračunajte enačbo normale na graf funkcije f v presečišču grafa funkcije f in premice z enačbo $y=\sqrt{2}$. Nalogo rešite brez uporabe računala.

(5 točk)

3.3. Zapišite predpis inverzne funkcije f^{-1} funkcije f. Izračunajte še $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ in $f^{-1}(1)$ ter dokažite, da ima enačba $f(x)=f^{-1}(x)$ na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ vsaj eno rešitev.

(4 točke)

3.4. Izračunajte limito $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

(2 točki)

M 1 9 1 4 0 2 1 2 1 0

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

4. Za poljubno realno število x definiramo geometrijsko zaporedje, katerega prvi člen je enak x, drugi člen pa je enak $x^3 - 4x$.

4.1. Poiščite vsa realna števila x, za katera je drugi člen enak 15. Nalogo rešite brez uporabe računala.

(2 točki)

4.2. Poiščite vsa realna števila x, za katera je pripadajoča geometrijska vrsta konvergentna. Nalogo rešite brez uporabe računala.

(7 točk)

4.3. Naj bo $x = \frac{11}{5}$ in naj ima pripadajoče geometrijsko zaporedje splošni člen a_n. Poiščite najmanjše naravno število n, za katerega je razlika $\sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ manjša od $\frac{1}{100}$.

(3 točke)

V sivo polje ne pišite.

M 1 9 1 4 0 2 1 2 1 2

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

M 1 9 1 4 0 2 1 2 1 6

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.