Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK
TAVASZI VIZSGAIDŐSZAK

M 1 9 1 4 0 2 1 2 M

Višja raven
Emelt szint

MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Sobota, 8. junij 2019 / 90 minut
2019. június 8., szombat / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, számológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 20 strani, od tega 5 rezervnih in 3 prazne.
A feladatlap 20 oldalas, ebből 5 tartalék és 3 üres.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	**4.**

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 14 do 18 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg. Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	***4.***

Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a ***feladatlap*** *erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 14–18. oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmazniuk kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

V sivo polje ne pišite. / A szürke mezőbe ne írjon!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$:

$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2, \varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1,\ v_c^2 = a_1b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \dfrac{abc}{4S},\ r = \dfrac{S}{s},\ s = \dfrac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2},\ \tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$

Összegek szorzattá történő átalakításának képletei:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cos\dfrac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

A szorzatok összeggé történő átalakításának képletei:

$\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

A $T_0(x_0, y_0)$ *pont távolsága az* $ax + by - c = 0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0, p) = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Az $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \dfrac{e}{a}$, *ha* $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett (kompozítum) függvény: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integrál: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

Prazna stran

Üres oldal

OBRNITE LIST.
LAPOZZON!

Naloga 1 je obvezna. / *Az 1. feladat kötelező.*

1. Nalogo rešite brez uporabe računala.
Dana je hiperbola z enačbo $x^2 - y^2 = 1$.

A feladatot számológép használata nélkül oldja meg!
Adott az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola.

1.1. Izračunajte enačbi tangent na dano hiperbolo v točkah $D_1(\sqrt{2}, 1)$ in $D_2(\sqrt{2}, -1)$.

Számítsa ki a $D_1(\sqrt{2}, 1)$ és $D_2(\sqrt{2}, -1)$ pontokban a hiperbolához állított érintő egyenesek egyenletét!

(3 točke/pont)

1.2. Tangenta t z enačbo $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$ seka asimptoto z enačbo $y = x$ dane hiperbole v točki P. Naj bosta F_1 in F_2 gorišči dane hiperbole. Izračunajte točke P, F_1 in F_2 ter zapišite enačbo krožnice skozi te tri točke.

Az $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$ egyenletű t érintő a megadott hiperbola $y = x$ egyenletű aszimpotáját a P pontban metszi. Az F_1 és F_2 pontok legyenek a hiperbola fókuszpontjai. Számítsa ki a P, F_1 és F_2 pontokat, valamint írja fel az ezekre a pontokra illeszkedő körvonal egyenletét!

(7 točk/pont)

1.3. Območje, ki ga omejujejo tangenta t z enačbo $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$, dana hiperbola in abscisna os, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Izračunajte volumen nastalega rotacijskega telesa.

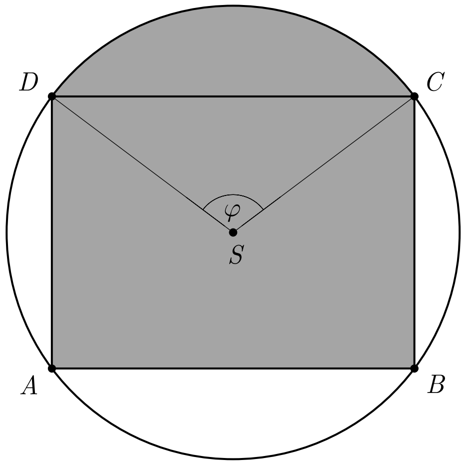
Azt a síkidomot, amelyet az $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$ egyelentű t érintő, a megadott hiperbola és az abszcisszatengely határolnak, az abszcisszatengely körül elforgatjuk $360°$ -kal. Számítsa ki az így keletkezett fogástest térfogatát!

(4 točke/pont)

Naloga 2 je obvezna. / *Az 2. feladat kötelező.*

2. Dana je krožnica s polmerom 6 in središčem S. Točke A, B, C in D rišemo na krožnico tako, da sta kota $\sphericalangle BAD$ in $\sphericalangle ABC$ prava kota (glejte na sliki eno izmed možnih narisanih situacij). Velikost kota $\sphericalangle CSD$ je odvisna od izbire položajev točk A, B, C in D na krožnici.

   Adott a 6 sugarú, S középpontú körvonal. Az A, B, C és D pontokat úgy rajzoljuk a körvonalra, hogy a $\sphericalangle BAD$ és $\sphericalangle ABC$ szögek derékszögek legyenek (nézze meg a képen az egyik lehetséges elhelyezkedést). A $\sphericalangle CSD$ szög mérete függ az A, B, C és D pontok elhelyezkedésétől a körvonalon.



2.1. Dokažite, da je za poljubne tako narisane točke A, B, C in D ploščina osenčenega območja v odvisnosti od velikosti kota $\varphi = \sphericalangle CSD$ enaka $S(\varphi) = 54\sin\varphi + 18\varphi$, če je kot φ izražen v radianih.

   Bizonyítsa, hogy tetszőlegesen megrajzolt A, B, C és D pontok esetén a satírozott rész területe függ a $\varphi = \sphericalangle CSD$ szögtől a következőképpen: $S(\varphi) = 54\sin\varphi + 18\varphi$, ha a φ szög nagyságát radiánban írjuk fel!

(4 točke/pont)

2.2. Za kateri topi kot $\varphi = \sphericalangle CSD$ je ploščina osenčenega območja največja? Kot zaokrožite na desetinko stopinje.

   Mely $\varphi = \sphericalangle CSD$ tompaszög esetén lesz a satírozott terület a legnagyobb? A szög fokokban felírt nagyságát kerekítse tizedekre!

(4 točke/pont)

2.3. Zgornja slika prikazuje tudi prerez predora z ravnino, ki je pravokotna na smer vožnje. Krožnica na sliki ima polmer 6 m, širina predora je $|AB| = 6$ m, njegova dolžina pa je 120 m. Ukrivljen strop in steni predora bodo prepleskali. V ta namen so kupili 400 ℓ barve. Ali bo barve dovolj, če za 40 m^2 porabijo natanko 5 ℓ barve? Zapišite odgovor in ga utemeljite.

   A fenti kép egy alagútnak az utazási irány síkjára merőleges metszetét is ábrázolja. A képen látható körvonal sugara 6 m, az alagút szélessége $|AB| = 6$ m, hosszúsága pedig 120 m. Az íves mennyezetet és a falakat szeretnék átfesteni. Ebből a célból 400 ℓ festéket vásároltak. Elegendő festéket vásároltak-e, ha 40 m^2 -hoz 5 ℓ festékre van szükség? Írja le a választ, és indokolja meg!

(6 točk/pont)

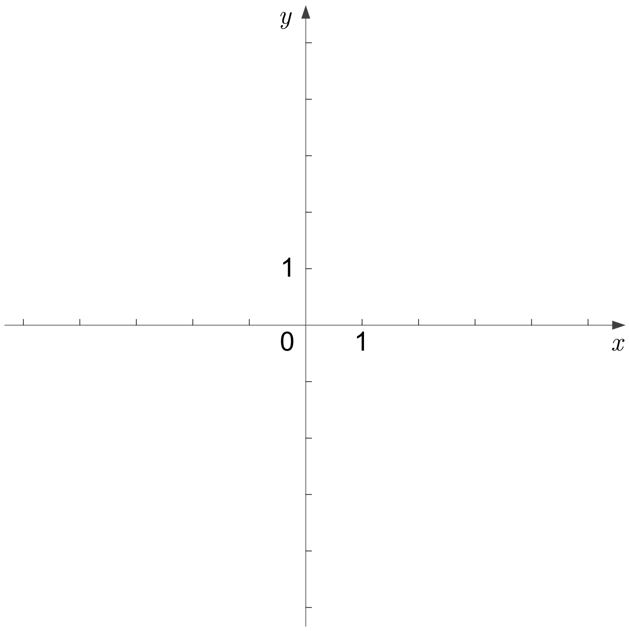
Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole. /
A 3. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

3. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=2^{-\frac{x}{2}}$.

Legyen adott az $f(x)=2^{-\frac{x}{2}}$ hozzárendelési szabályú $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény.

3.1. Narišite graf funkcije f.

Ábrázolja az f függvény grafikonját!



(1 točka/pont)

3.2. Izračunajte enačbo normale na graf funkcije f v presečišču grafa funkcije f in premice z enačbo $y=\sqrt{2}$. Nalogo rešite brez uporabe računala.

Számítsa ki az f függvény és az $y=\sqrt{2}$ egyenes metszéspontjában a f függvény grafikonjához állított normális egyenletét! A feladatot számológép használata nélkül oldja meg!

(5 točk/pont)

3.3. Zapišite predpis inverzne funkcije f^{-1} funkcije f. Izračunajte še $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ in $f^{-1}(1)$ ter dokažite, da ima enačba $f(x)=f^{-1}(x)$ na intervalu $\left[\frac{1}{2},1\right]$ vsaj eno rešitev.

Írja fel az f függvény f^{-1} inverz függvényének egyenletét! Számítsa ki továbbá az $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ és $f^{-1}(1)$ értékeket, és bizonyítsa be, hogy az $f(x)=f^{-1}(x)$ egyenletnek az $\left[\frac{1}{2},1\right]$ intervallumon legalább egy megoldása van!

(4 točke/pont)

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

3.4. Izračunajte limito $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

Számítsa ki a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ *határértéket!*

(2 točki/pont)

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole. /
A 4. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

4. Za poljubno realno število x definiramo geometrijsko zaporedje, katerega prvi člen je enak x, drugi člen pa je enak $x^3 - 4x$.

   Egy tetszőleges x valós számra definiáljuk azt a mértani sorozatot, amelynek első tagja x, második tagja pedig $x^3 - 4x$.

   4.1. Poiščite vsa realna števila x, za katera je drugi člen enak 15. Nalogo rešite brez uporabe računala.

   Írja fel az összes olyan x valós számot, amelyre a második tag egyenlő 15 -tel! A feladatot számológép használata nélkül oldja meg!

   (2 točki/pont)

   4.2. Poiščite vsa realna števila x, za katera je pripadajoča geometrijska vrsta konvergentna. Nalogo rešite brez uporabe računala.

   Írja fel az összes olyan x valós számot, amelyre a keletkezett mértani sor konvergens! A feladatot számológép használata nélkül oldja meg!

   (7 točk/pont)

   4.3. Naj bo $x = \frac{11}{5}$ in naj ima pripadajoče geometrijsko zaporedje splošni člen a_n. Poiščite najmanjše naravno število n, za katerega je razlika $\sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ manjša od $\frac{1}{100}$.

   Legyen $x = \frac{11}{5}$, és a keletkezett mértani sorozat általános tagja legyen a_n. Írja fel azt a legkisebb n természetes számot, amelyre a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ különbség kisebb $\frac{1}{100}$ -nél!

   (3 točke/pont)

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

Prazna stran

Üres oldal

Prazna stran

Üres oldal