



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE AUTUNNALE

**Livello di base**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

**Lunedì, 26 agosto 2019 / 120 minuti**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.*

*Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.*





## Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n$  è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  $d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , se  $a > b$

Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli:  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$



1. Risolvete i quesiti che si trovano nella colonna di sinistra della tabella. Scrivete le soluzioni nella colonna di destra della tabella. Basatevi sull'esempio risolto.

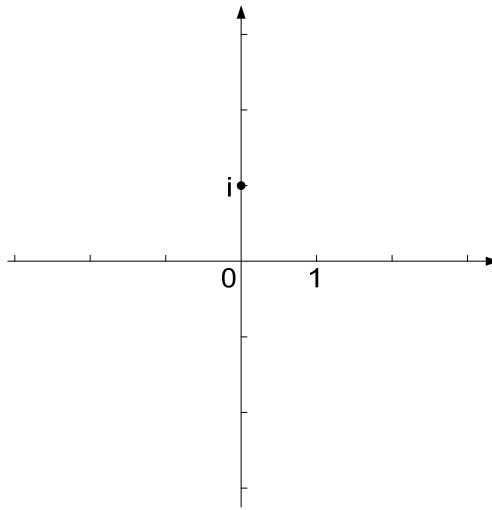
<p><b>Scrivete l'insieme immagine della funzione</b>  <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> <b>con la dipendenza</b> <math>f(x) = x^2 + 1</math>.</p>	$I_f = [1, \infty)$
<p>Scrivete il massimo comune divisore dei numeri <math>2^5</math> e <math>5^2</math>.</p>	$M.C.D.(2^5, 5^2) =$
<p>Scrivete l'intervallo <math>I</math>, che è l'insieme delle soluzioni della disequazione <math> x  \leq 3</math>.</p>	$I =$
<p>Scrivete il punto medio del segmento <math>AB</math> di estremi <math>A(2, -1)</math> e <math>B(3, 3)</math>.</p>	$M( \quad , \quad )$
<p>Scrivete l'equazione della circonferenza nel piano con centro <math>S(-1, 3)</math> e raggio <math>r = 2</math>.</p>	
<p>Risolvete l'equazione <math>3^{x-1} = 1</math>.</p>	$x =$
<p>Risolvete l'equazione <math>\sin x = -1</math>.</p>	

(8 punti)



2. È dato il numero complesso  $z_1 = 2 + i$ .

- 2.1. Disegnate il numero complesso  $z_1$  nel piano complesso e calcolate il suo valore assoluto.  
Nel piano complesso disegnate inoltre l'insieme  $M = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = -2\}$ .



- 2.2. Calcolate il numero complesso  $w$ , in modo che valga  $\overline{z_1} + w = 10 - 17i$ . Scrivete il numero  $w$  nella forma  $w = a + bi$ , dove  $a, b \in \mathbb{R}$ . (4)

(4)  
(8 punti)



3. Risolvete l'equazione  $\log_3 x = 1 - \log_3 (x - 2)$ .

(5 punti)



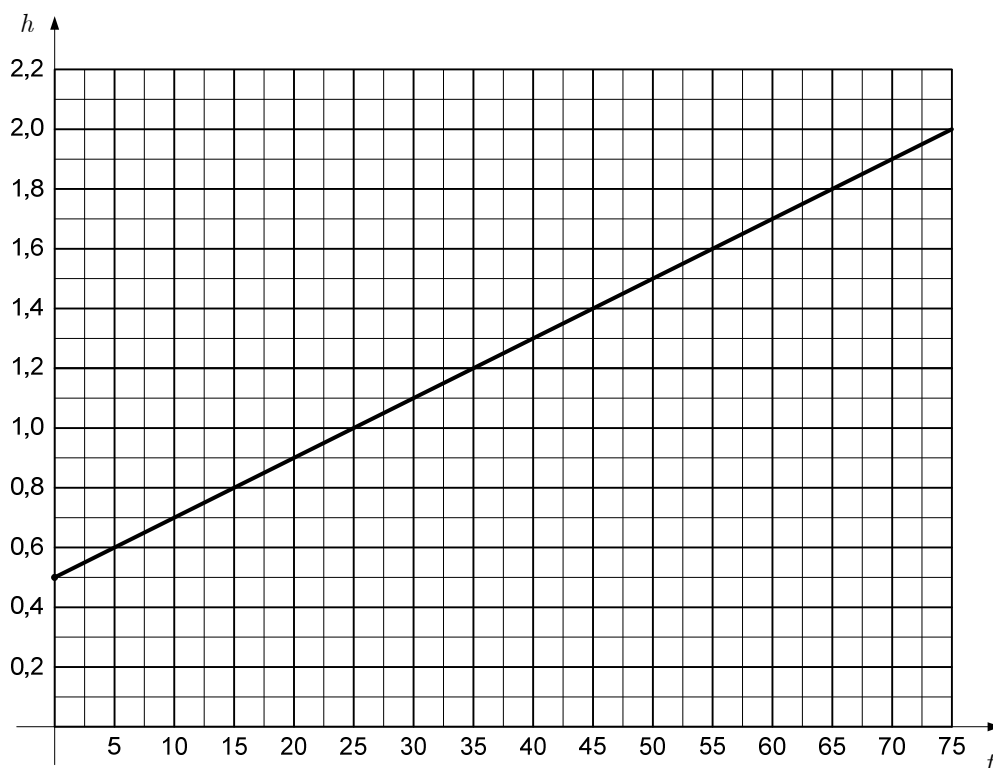
M 1 9 2 4 0 1 1 1 0 7

4. Il terzo termine di una successione aritmetica è uguale a 8, il quinto termine è uguale a 15.  
Calcolate la ragione, il primo termine e la somma dei primi 100 termini della successione data.

*(6 punti)*



5. Una piscina, in cui inizialmente l'acqua raggiungeva una certa altezza, viene ulteriormente riempita. L'altezza dell'acqua aumenta linearmente con il tempo. La figura mostra il grafico della funzione  $f$ , che esprime la variazione dell'altezza  $h$  dell'acqua nella piscina nel tempo  $t$ . Rispondete alle domande sottostanti. L'altezza dell'acqua è misurata in metri, il tempo in minuti.



5.1. Qual era l'altezza dell'acqua nella piscina all'inizio, prima dell'ulteriore riempimento?

(1)

5.2. Qual era l'altezza dell'acqua nella piscina un'ora dopo aver iniziato a riempirla?

(1)

5.3. Di quanto aumenta l'altezza dell'acqua nella piscina ogni 15 minuti?

(1)

5.4. Scrivete la dipendenza della funzione  $f$ .

(2)  
(5 punti)





6. Siano  $\vec{i} = (1, 0)$  e  $\vec{j} = (0, 1)$  due vettori nel piano  $\mathbb{R}^2$ .

6.1. Determinate  $t \in \mathbb{R}$  in modo che i vettori  $\vec{u} = t \cdot \vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$  siano ortogonali.

(3)

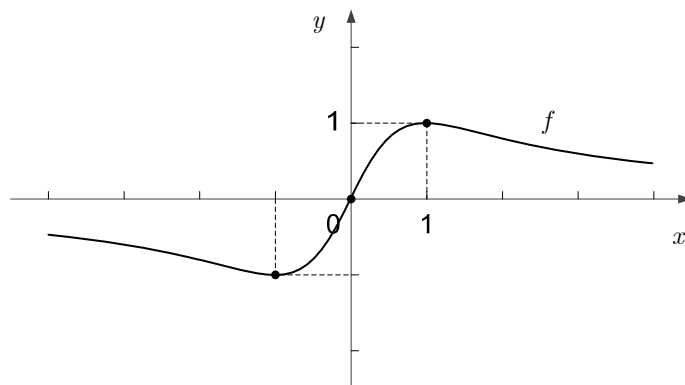
6.2. Determinate tutti gli  $s \in \mathbb{R}$  in modo che i vettori  $\vec{u} = s \cdot \vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + s \cdot \vec{j}$  siano paralleli.

(4)

(7 punti)



7. La figura mostra parte del grafico di una funzione dispari  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La funzione  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è espressa dalla dipendenza  $g(x) = 2x + 1$ .



- 7.1. Scrivete i valori delle funzioni:

$$f(-1) =$$

$$g^{-1}(-2) =$$

$$f(g(0)) =$$

(4)

- 7.2. Calcolate:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx =$$

$$\int_{-1}^3 g(x) dx =$$

(4)  
(8 punti)



8. È data la funzione  $f$  con la dipendenza  $f(x) = x^4 - x^2$ .

8.1. Calcolate tutti gli zeri della funzione  $f$ .

(2)

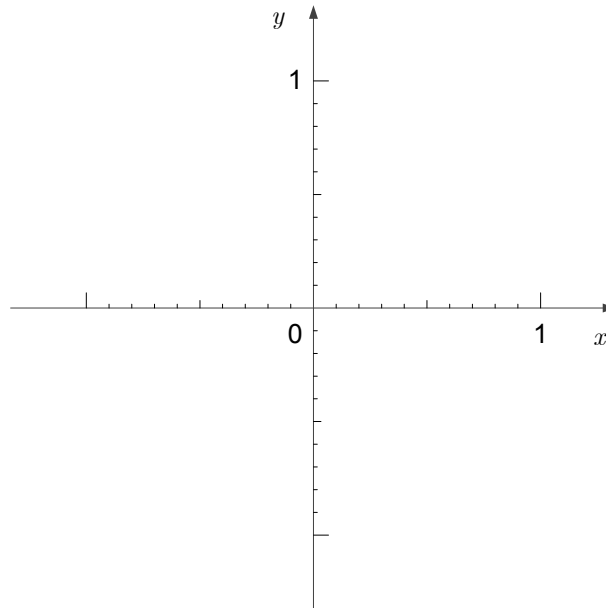
8.2. Calcolate la derivata  $f'$ .

(1)

8.3. Calcolate tutti gli estremi relativi della funzione  $f$ .

(3)

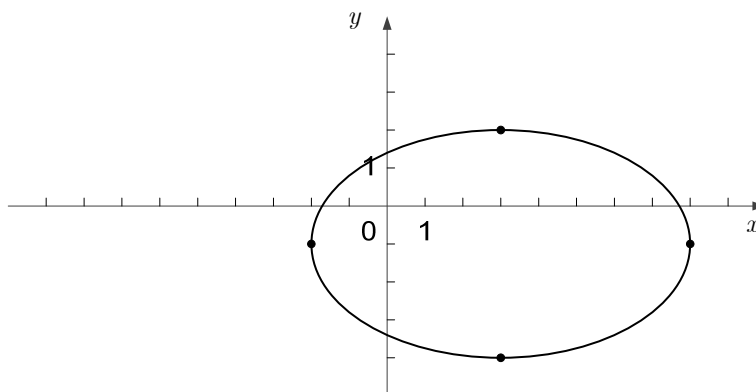
8.4. Tracciate il grafico della funzione  $f$ .



(1)  
(7 punti)



9. Nel piano è stata tracciata l'ellisse di vertici  $A(-2, -1)$ ,  $B(3, -4)$ ,  $C(8, -1)$  e  $D(3, 2)$ .



- 9.1. Scrivete l'equazione dell'ellisse del disegno. (4)
- 9.2. Qual è la distanza tra il fuoco sinistro dell'ellisse e l'origine del sistema di coordinate?  
Risolvete il quesito senza far uso della calcolatrice.

(3)  
(7 punti)





11. Calcolate il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \pi) + 3x}{4x}$ .

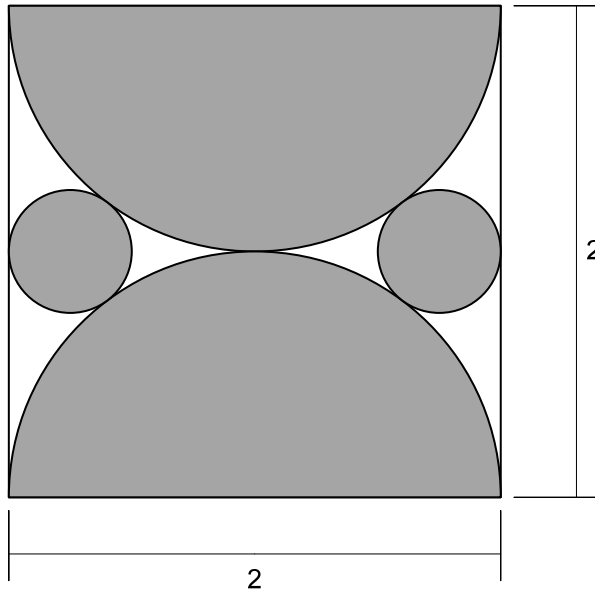
(5 punti)



M 1 9 2 4 0 1 1 1 1 5

Non scrivete nel campo grigio.

12. Nel quadrato sottostante, il cui lato è di lunghezza 2, calcolate la somma delle aree di tutte le figure ombreggiate. Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice. Le figure ombreggiate sono due semicerchi di raggio 2 e due cerchi. I cerchi tangono ambedue i semicerchi e i lati del quadrato.



(7 punti)



PAGINA DI RISERVA