



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE AUTUNNALE

Livello di base
MATEMATICA

≡≡≡ Prova d'esame 1 ≡≡≡

- A) Quesiti brevi
B) Quesiti strutturati brevi

Mercoledì, 25 agosto 2021 / 90 minuti (30 + 60)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice. Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

~~Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.~~

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate A e B. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 30 minuti alla risoluzione della parte A, e 60 minuti a quella della parte B.

La parte A della prova d'esame contiene 8 quesiti brevi; la parte B della prova contiene 6 quesiti strutturati brevi. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 20 nella parte A e 40 nella parte B. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 13 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 1 vuota e 2 di riserva.

**Formule**

(Somma e differenza di cubi) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ vale $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , il raggio della circonferenza inscritta al triangolo dato è r e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è R . Perciò $r = \frac{A}{p}$ e $R = \frac{abc}{4A}$.

(Formola di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Quindi la sua area è $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ punti nel piano. L'area del triangolo di vertici A, B e C è $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume della sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Formule di bisezione)

$$\text{Per qualsiasi } x \in \mathbb{R} \text{ vale } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

$$\text{Per un qualsiasi } x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \} \text{ vale } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta direttrice della parabola data è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di

$$\text{ragione } q \in \mathbb{R} \text{ è } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ se } q \neq 1, \text{ e } S_n = na_1, \text{ e } q = 1.$$

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Pagina vuota

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large empty rectangular box intended for handwritten notes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large, empty rectangular box intended for handwritten notes or minutes.

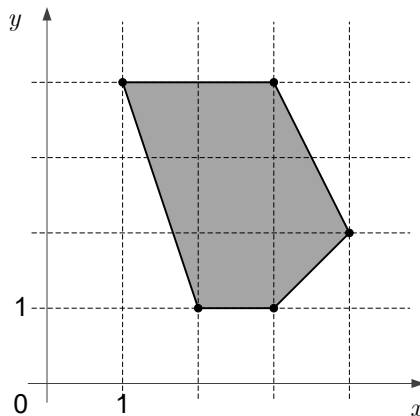
**A) QUESITI BREVI**

1. Nella tabella sottostante, accanto a ogni affermazione cerciate SÌ se essa è vera (corretta), NO se essa è falsa (non corretta). Seguite come esempio la prima affermazione.

Affermazione	Verità/Falsità dell'affermazione	
Il numero 125 è divisibile per 5.	<input checked="" type="radio"/> SÌ	NO
Il numero 2021 è divisibile per 5.	<input type="radio"/> SÌ	NO
Il numero $2^{2021} + 2^{2023}$ è divisibile per 5.	<input type="radio"/> SÌ	NO
Il numero $100!$ è divisibile per 5.	<input type="radio"/> SÌ	NO

(3 punti)

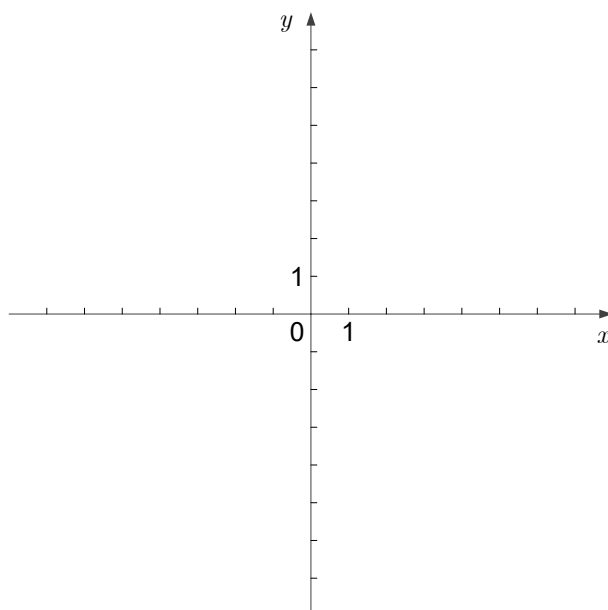
2. Calcolate l'area della figura.



(2 punti)

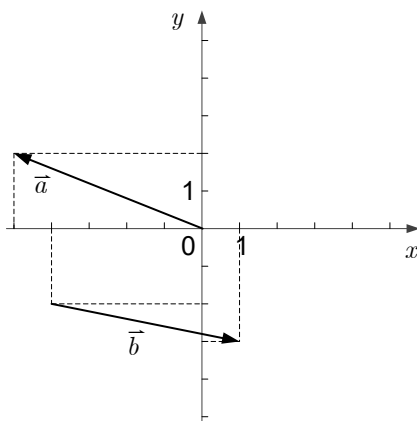


3. Senza usare la derivata, tracciate il grafico della funzione razionale $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, espressa dalla dipendenza $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.



(3 punti)

4. Scrivete le coordinate (le componenti) dei vettori \vec{a} e \vec{b} , disegnati nella figura.



(2 punti)



5. Un recipiente a forma di cilindro ha l'altezza di 50 cm e il volume di 20 ℓ. Calcolate il raggio del cilindro. Scrivete il risultato in decimetri, arrotondato a una cifra decimale.

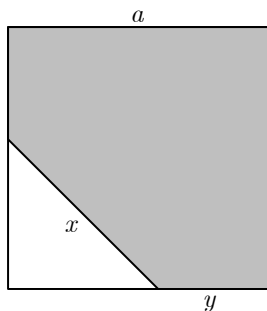
(3 punti)

6. Calcolate la derivata della funzione con la dipendenza $f(x) = \sin x - e^{-x}$.

(2 punti)



7. A un quadrato di lato 7 tagliamo un triangolo rettangolo isoscele con i lati obliqui di lunghezza 4 (v. figura). Calcolate il perimetro del pentagono così ottenuto.



(3 punti)

8. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha la dipendenza $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Scrivete la dipendenza della funzione inversa f^{-1} e la dipendenza della derivata f' della funzione data f .

(2 punti)

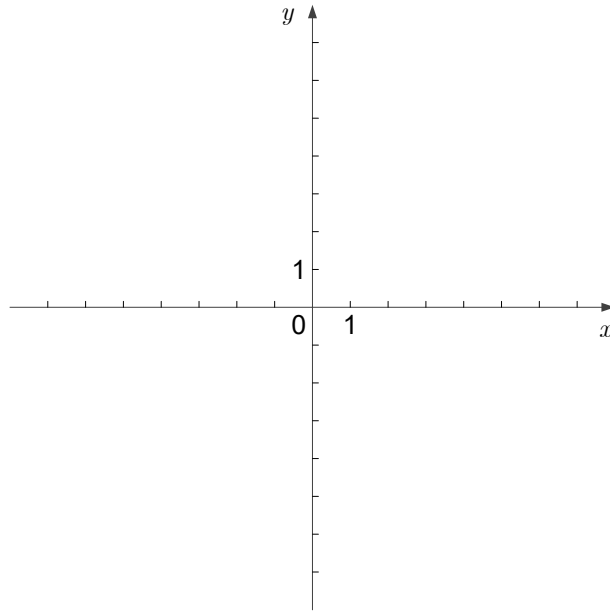
**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

1. È data l'equazione quadratica $x^2 - 2x + a = 0$. Sia $x_1 = 1 - 2i$ una soluzione dell'equazione. Scrivete anche la seconda soluzione e calcolate a . Calcolate per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 - 2x + a = 0$ non ha soluzioni reali.

(5 punti)



2. Nel piano, corredato da un sistema di coordinate, disegnate la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 25$ e la retta di equazione $2x - y = 0$, calcolate e scrivete i loro punti d'intersezione.



(8 punti)



3. È data la funzione f con la dipendenza $f(x) = -4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Calcolate $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e gli zeri della funzione f , scrivete l'insieme immagine I_f .

Calcolate il coefficiente d'inclinazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $T\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$.

(6 punti)



M 2 1 2 4 0 1 1 1 1 7

4. Sia f la funzione con la dipendenza $f(x) = a \cdot 3^{x-1} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

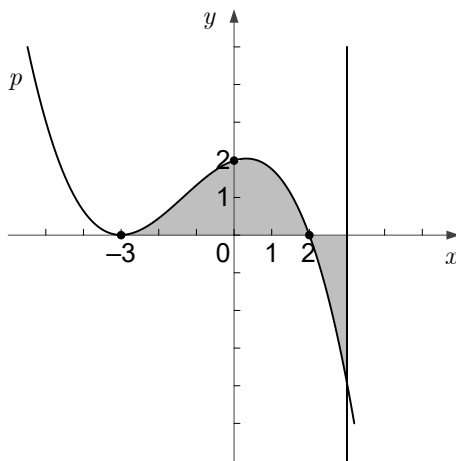
Calcolate i numeri a e b , se $f(1) = -1$ e $f(3) = -17$.

Sia $a = b = 1$. Scrivete l'insieme massimo nel quale la funzione f è definita, e l'insieme immagine della funzione f .

(7 punti)



5. Nella figura è tracciato il grafico del polinomio p di terzo grado. L'area della parte di piano S_1 , che il grafico delimita con l'asse delle ascisse tra gli zeri -3 e 2 , è uguale a $\frac{625}{108}$, l'area della parte di piano S_2 , che il grafico delimita con l'asse delle ascisse e la retta $x = 3$, è uguale a $\frac{193}{108}$.



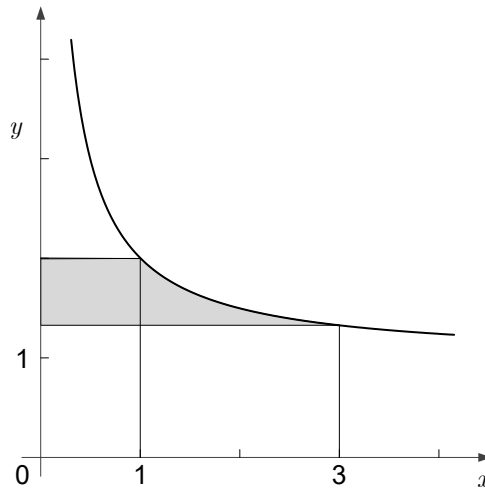
Scrivete la dipendenza $p(x)$ del polinomio p nella forma scomposta e calcolate il coefficiente direttivo.

Calcolate $\int_{-3}^3 p(x) dx$.

(6 punti)



6. Nella figura è rappresentata una parte del grafico della funzione f con la dipendenza $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Calcolate l'area della parte ombreggiata. Il risultato sia esatto.



(8 punti)



Pagina di riserva