



Šifra kandidata:

Državni izpitni center



JESENSKI IZPITNI ROK

Višja raven
MATEMATIKA
==== Izpitna pola 1 ====

- B) Krajše strukturirane naloge
C) Strukturirane naloge

Četrtek, 25. avgust 2022 / 90 minut (45 + 45)

Dovoljeno gradivo in pripomočki:

Kandidat prinese naliveo pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko in geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik) in računalno.

Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začnajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

~~Pri reševanju te izpitne pole uporaba računalnika ni dovoljena.~~

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.

**Formule**

(Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom) Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ in za poljubno naravno število n velja

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Evklidov in višinski izrek) Pravokotni trikotnik ima kateti a in b ter hipotenuzo c . Višina na hipotenuzo je v_c , pravokotna projekcija katete a na hipotenuzo je a_1 , pravokotna projekcija katete b na hipotenuzo pa b_1 . Tedaj velja $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$.

(Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga) Trikotnik ima stranice a, b in c , polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$, ploščina je S , polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je r in polmer danemu trikotniku očrtanega kroga je R . Tedaj je $r = \frac{S}{s}$ in $R = \frac{abc}{4S}$.

(Heronova formula) Trikotnik ima stranice a, b in c , polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Tedaj je njegova ploščina $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

(Ploščina trikotnika) Naj bodo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči A, B in C je enaka $S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Krogla) Površina in prostornina krogle s polmerom r sta $P = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Razdalja točke od premice) Naj bodo $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ in naj a in b ne bosta oba enaka 0.

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice p , podane z enačbo $ax + by - c = 0$, je

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritem) Naj bosta $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Tedaj za vsak $x > 0$ velja $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Adicijski izreki) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Za poljubna $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, za katera je $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ in

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{velja} \quad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Kotne funkcije polovičnih kotov) Za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Za poljuben $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ velja $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



(Razčlenitev produkta kotnih funkcij) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Elipsa) Elipsa v ravnini ima polosi a in b ($a > b$), njena linearna ekscentričnost je e , njena numerična ekscentričnost je ε . Tedaj velja $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

(Hiperbola) Hiperbola v ravnini ima realno polos a in imaginarno polos b , njena linearna ekscentričnost je e , njena numerična ekscentričnost je ε . Tedaj velja $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

(Parabola) Parabola v ravnini z enačbo $y^2 = 2px$ ima gorišče v $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, enačba premice vodnice dane parabole pa je $x = -\frac{p}{2}$.

(Aritmetično zaporedje) Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja (a_n) je $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

(Geometrijsko zaporedje) Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja (a_n) s kvociantom $q \in \mathbb{R}$ je $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, če je $q \neq 1$, in $S_n = na_1$, če je $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ in $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Nedoločeni integral) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj je za vsak $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{in} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integracija po delih) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volumen rotacijskega telesa) Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije f , abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, zavrtimo okrog abscisne osi za 360° , je $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Bernoullijeva formula) Naj bo p verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek A . Verjetnost, da se dogodek A v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko k -krat, je

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



M 2 2 2 4 0 2 1 1 0 5

Konceptni list



Konceptni list

Empty rectangular box for writing.

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



Konceptni list

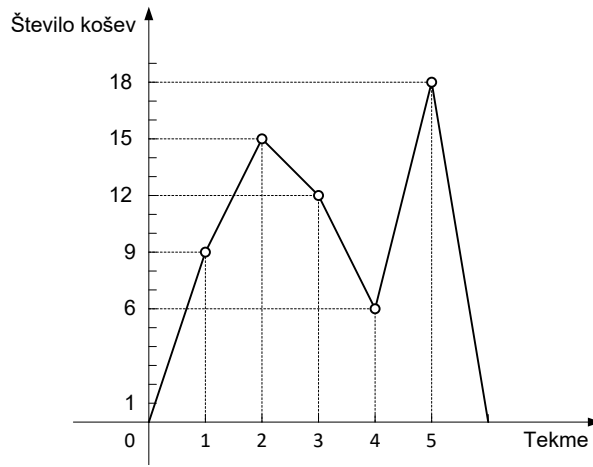


Konceptni list

Empty rectangular box for writing the concept list.



3. Marko in Žiga igrata košarko. Marko je odigral pet tekem, Žiga pa tri. Število košev, ki jih je na odigranih tekmah dosegel Marko, je prikazano s frekvenčnim poligonom:



Število košev, ki jih je dosegel Žiga, pa je prikazano s tabelo:

	Število košev
1. tekma	x
2. tekma	9
3. tekma	17

Koliko košev je dosegel Žiga na prvi tekmi, če sta imela oba enako povprečje na tekmo?

(6 točk)



6. Preverite, da je število 2 dvojna ničla polinoma $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40$. Poiščite še preostali dve (kompleksni) rešitvi enačbe $p(x) = 0$. Nalogo rešite brez uporabe računalna.

(7 točk)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



Rezervna stran

OBRNITE LIST.

**C) STRUKTURIRANE NALOGE**

1. V množici celih števil rešite spodnje enačbe.

1.1. $1 + n(1 + n(1 + n(1 + n(1 + n)))) = \frac{63}{n-1}$

(4 točke)

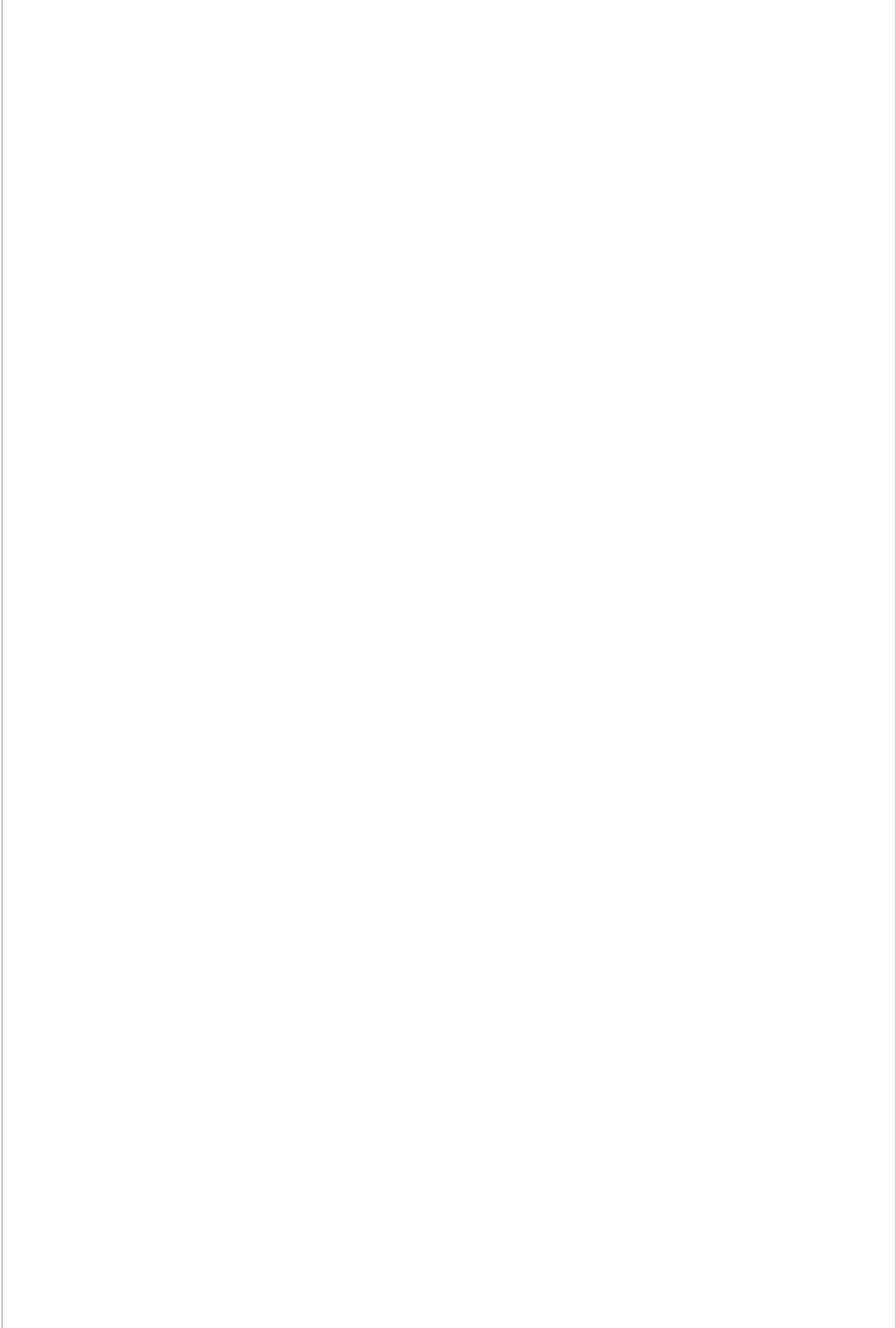
1.2. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} + 32 - n$

(3 točke)

1.3. $111\ 111\ 111\ 114^2 - 111\ 111\ 111\ 112^2 = 4n$

(3 točke)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.

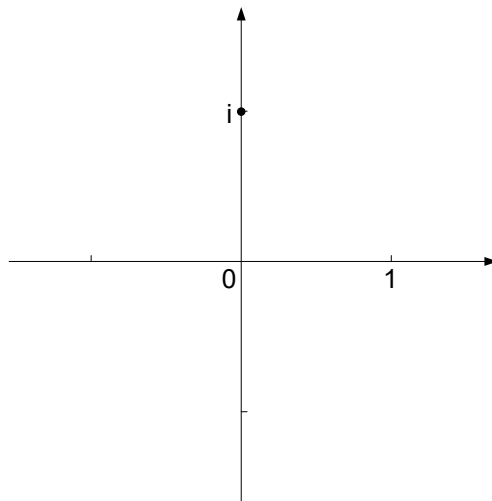




2. Nalogo rešite brez uporabe računalja. Dana je množica kompleksnih števil $A = \{z_1, z_2, z_3\}$,

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \text{in} \quad z_3 = 1.$$

2.1. Skicirajte števila z_1, z_2 in z_3 v kompleksni ravnini ter dokažite, da ležijo na isti krožnici s središčem $(0, 0)$.



(4 točke)

2.2. Preverite, da velja trditev: produkt poljubnih dveh elementov množice A je element množice A .

(4 točke)

2.3. Naj bo $B = \{z_1, z_2, z_3, -z_1, -z_2, -z_3\}$. Preverite, da velja $z_1 + z_2 = -z_3$, $z_2 + z_3 = -z_1$ in $z_3 + z_1 = -z_2$. Ali velja trditev: vsota poljubno mnogo sumandov, ki so vsi elementi množice B , je tudi element množice B ? Odgovor utemeljite.

(2 točki)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



