



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE AUTUNNALE

Livello superiore
MATEMATICA

≡≡≡ Prova d'esame 2 ≡≡≡

B) Quesiti strutturati brevi
C) Quesiti strutturati

Giovedì, 25 agosto 2022 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice. Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.



M 2 2 2 4 0 2 1 2 1 0 3

Formule

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato

è r e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

(Formula di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area è

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici A, B e C è uguale a

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0 . La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ vale $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formula di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta



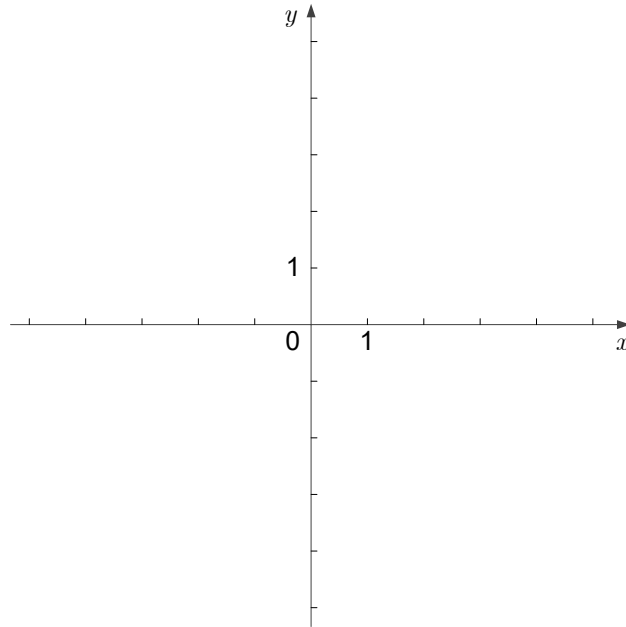
Foglio per la minuta

A large, empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

1. È data la funzione quadratica f con la dipendenza $f(x) = -2x^2 - 4x$. Calcolate i due zeri della funzione f , il vertice del suo grafico e tracciate il suo grafico. Calcolate il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $A(2, y_0)$.



(8 punti)



2. Al mercato abbiamo comperato 6,8 kg di mele di qualità superiore e 3,2 kg di mele di qualità normale. Abbiamo pagato 16,02 €. Le mele di qualità superiore sono del 10 % più care delle mele di qualità normale. Quanto costa un chilogrammo di mele di qualità superiore e quanto costa un chilogrammo di mele di qualità normale? Scrivete la risposta.

(7 punti)



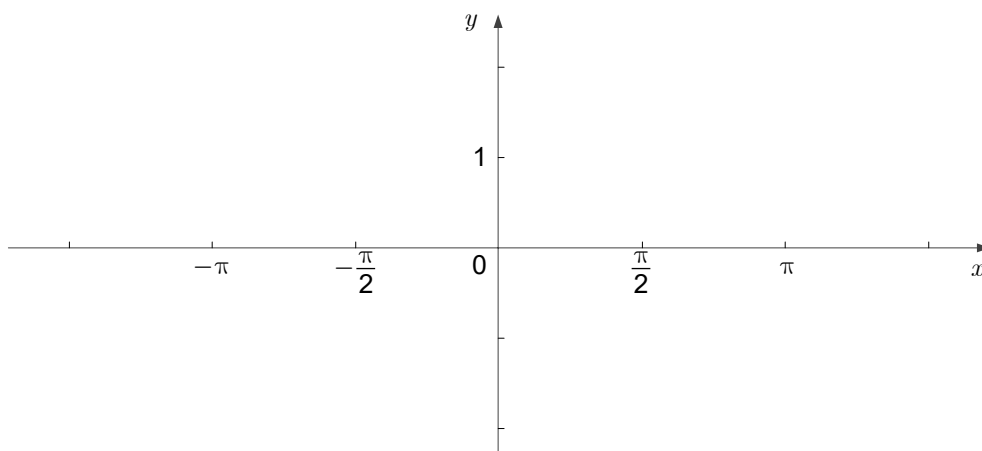
M 2 2 2 4 0 2 1 2 1 1 1

3. Sono dati nello spazio i punti $A(1, 2, 3)$ e $B(2, 3, 4)$ e il vettore $\vec{c} = (1, -2, 1)$. Scrivete il vettore \overline{AB} con le coordinate (componenti). Calcolate la lunghezza esatta del vettore \vec{c} e dimostrate con il calcolo che i vettori \overline{AB} e \vec{c} sono ortogonali.

(6 punti)



4. Sono date le funzioni $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con le dipendenze $f(x) = \sin(2x)$ e $g(x) = \cos x$.
Disegnate nel sistema di coordinate il grafico della funzione f .



Calcolate le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici delle funzioni f e g .

(7 punti)



5. È data la successione aritmetica di termine generale $a_n = 2n - 2$.

Calcolate la somma $\sum_{n=1}^{100} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$.

Dimostrate che la successione, espressa dal termine generale $b_n = 2^{a_n}$, è geometrica.

(6 punti)



6. In una festa c'erano 16 persone: 4 coppie di persone coniugate, 5 uomini non sposati e 3 donne non sposate. Per un gioco di società sono state scelte a caso 2 persone. Calcolate la probabilità degli eventi:

A – le due persone scelte sono una coppia di persone coniugate,
 B – le due persone scelte sono non sposate e di sesso diverso.

(6 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 2 2 4 0 2 1 2 1 1 5

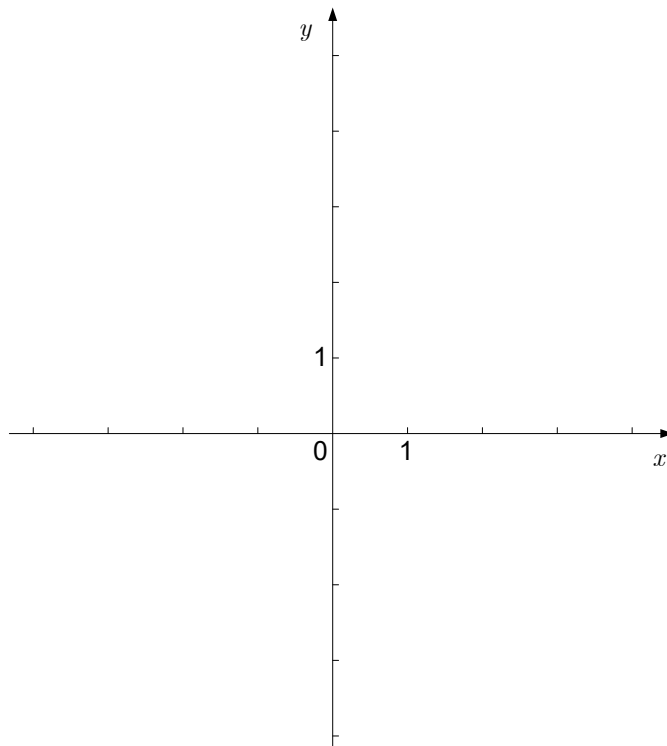
Pagina di riserva

VOLTATE IL FOGLIO.

**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. Sono date le funzioni con le dipendenze $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^{-2}$.

1.1. Tracciate nel sistema di coordinate i grafici delle funzioni f e g .



1.2. Calcolate le derivate delle funzioni f e g e l'ampiezza dell'angolo tra i grafici nel punto d'intersezione. (2 punti)

1.3. Calcolate con esattezza il numero b , $b > 1$, per il quale l'area della figura delimitata dai grafici delle funzioni f e g , l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = b$, è uguale a $\frac{9}{8}$. (4 punti)

(4 punti)

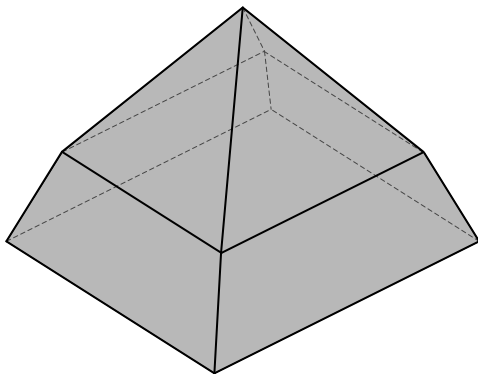
Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



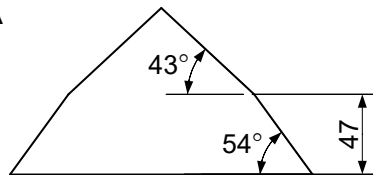
A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten input.



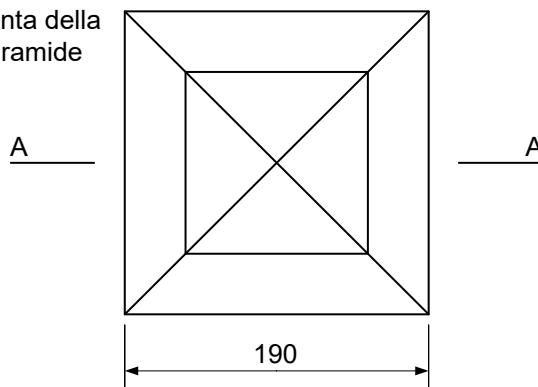
2. La piramide spezzata è un edificio monumentale dell'antico Egitto, situato nella necropoli dei re a Dahshur, a circa 40 km a sud del Cairo. La faccia laterale della parte inferiore della piramide ha l'inclinazione di 54° , mentre la parte che va dall'altezza di 47 m fino alla punta, è meno inclinata e ha una pendenza di 43° , il che produce la forma inusuale della piramide spezzata. La lunghezza del lato della base quadrata è di 190 m (v. figura).



Sezione A



Pianta della piramide



- 2.1. Calcolate l'altezza della piramide spezzata. (3 punti)
- 2.2. Calcolate il volume della piramide spezzata. (3 punti)
- 2.3. La parte esterna della piramide era rivestita di marmo bianco. Di quanti m^2 di marmo bianco ci sarebbe bisogno per restaurare la piramide? (4 punti)

Scrivete l'altezza con l'esattezza del metro, il volume e l'area della superficie del marmo con l'esattezza a quattro cifre significative.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 2 2 4 0 2 1 2 1 1 9

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for handwritten input.



Pagina di riserva