



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello di base**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

- A) Quesiti brevi  
B) Quesiti strutturati brevi

**Sabato, 3 giugno 2023 / 90 minuti (30 + 60)**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta).*

*Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli perforati della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

**Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate A e B. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 30 minuti alla risoluzione della parte A, e 60 minuti a quella della parte B.

La parte A della prova d'esame contiene 8 quesiti brevi; la parte B della prova contiene 6 quesiti strutturati brevi. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 20 nella parte A e 40 nella parte B. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Potete disegnare con la matita. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 13 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 20 pagine, di cui 1 vuota e 2 di riserva.*



**Formule**

**(Somma e differenza di cubi)** Per qualsiasi  $a, b \in \mathbb{R}$  vale  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ .

**(Teorema di Euclide e dell'altezza)** Il triangolo rettangolo ha i cateti  $a$  e  $b$  e l'ipotenusa  $c$ . L'altezza all'ipotenusa è  $h_c$ , la proiezione ortogonale del cateto  $a$  all'ipotenusa è  $a_1$ , la proiezione ortogonale del cateto  $b$  all'ipotenusa è  $b_1$ . Quindi vale  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$ .

**(Raggio della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta a un triangolo)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , l'area è  $A$ , il raggio della circonferenza inscritta al triangolo dato è  $r$  e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è  $R$ .

$$\text{Perciò } r = \frac{A}{p} \text{ e } R = \frac{abc}{4A}.$$

**(Formola di Erone)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Quindi la sua area è  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

**(Area del triangolo)** Siano  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  punti nel piano. L'area del triangolo di vertici  $A, B$  e  $C$  è  $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$ .

**(Sfera)** L'area della superficie totale e il volume della sfera di raggio  $r$  sono  $S = 4\pi r^2$ ,  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

**(Teoremi di addizione)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ , per i quali  $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$  per qualsiasi  $k \in \mathbb{Z}$  e

$$\tan x \tan y \neq -1, \text{ vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

**(Formule di bisezione)**

$$\text{Per qualsiasi } x \in \mathbb{R} \text{ vale } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

$$\text{Per un qualsiasi } x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \} \text{ vale } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

**(Ellisse)** L'ellisse nel piano ha i semiassi  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ), la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Iperbole)** L'iperbole nel piano ha il semiasse reale  $a$  e il semiasse immaginario  $b$ , la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Parabola)** Parabola nel piano di equazione  $y^2 = 2px$  ha il fuoco in  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , l'equazione della retta direttrice della parabola data è  $x = -\frac{p}{2}$ .

**(Successione aritmetica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione aritmetica  $(a_n)$  è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

**(Successione geometrica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione geometrica  $(a_n)$  di

$$\text{ragione } q \in \mathbb{R} \text{ è } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ se } q \neq 1, \text{ e } S_n = na_1, \text{ e } q = 1.$$

**(Limiti)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .



# Pagina vuota

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**

A large empty rectangular box intended for writing the minutes of a meeting.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 3 1 4 0 1 1 1 0 7

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

### Foglio per la minuta



**Foglio per la minuta**

A large empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**A) QUESITI BREVI**

1. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 4, 6\}$ . Scrivete, elencandone gli elementi, gli insiemi  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .

(2 punti)

2. Calcolate  $\frac{1}{2+i}$  e scrivete il risultato nella forma  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(3 punti)



3. Riformulate in notazione matematica (algebrica) la seguente frase:  
Sottraiamo dal quadrato della somma dei numeri  $a$  e  $b$  il quintuplo del quadrato del numero  $c$ .

(2 punti)

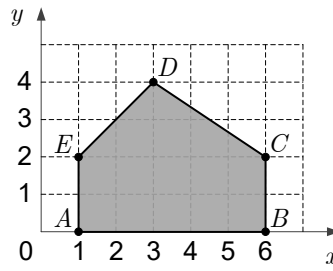
4. Semplificate la frazione  $\frac{3^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 3^{x-1}}{4 \cdot 3^{x-1}}$ .

(3 punti)



M 2 3 1 4 0 1 1 1 1 1

5. Calcolate l'area della figura  $ABCDE$  nell'immagine.



(3 punti)

6. Calcolate il valore dell'espressione  $8(\log_2 32 + 2^{-3})$ .

(3 punti)



7. Calcolate  $\int_0^1 f(x) dx$ , se  $\int_0^5 f(x) dx = 6$  e  $\int_1^5 f(x) dx = 4$ .

(1 punto)

8. Risolvete l'equazione quadratica  $x^2 + 2x + 2 = 0$  nell'insieme complesso.

(3 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

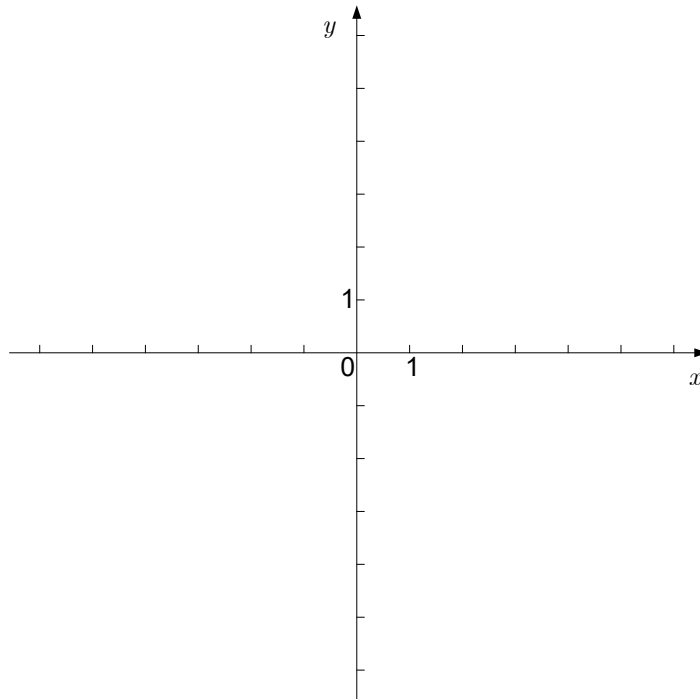


# Pagina di riserva

**VOLTATE IL FOGLIO.**

**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

1. Tracciate le rette di equazione  $y = -3$  e  $y = -2x + 3$  e calcolate l'area del triangolo che le rette racchiudono con l'asse delle ordinate.



(6 punti)



M 2 3 1 4 0 1 1 1 1 5

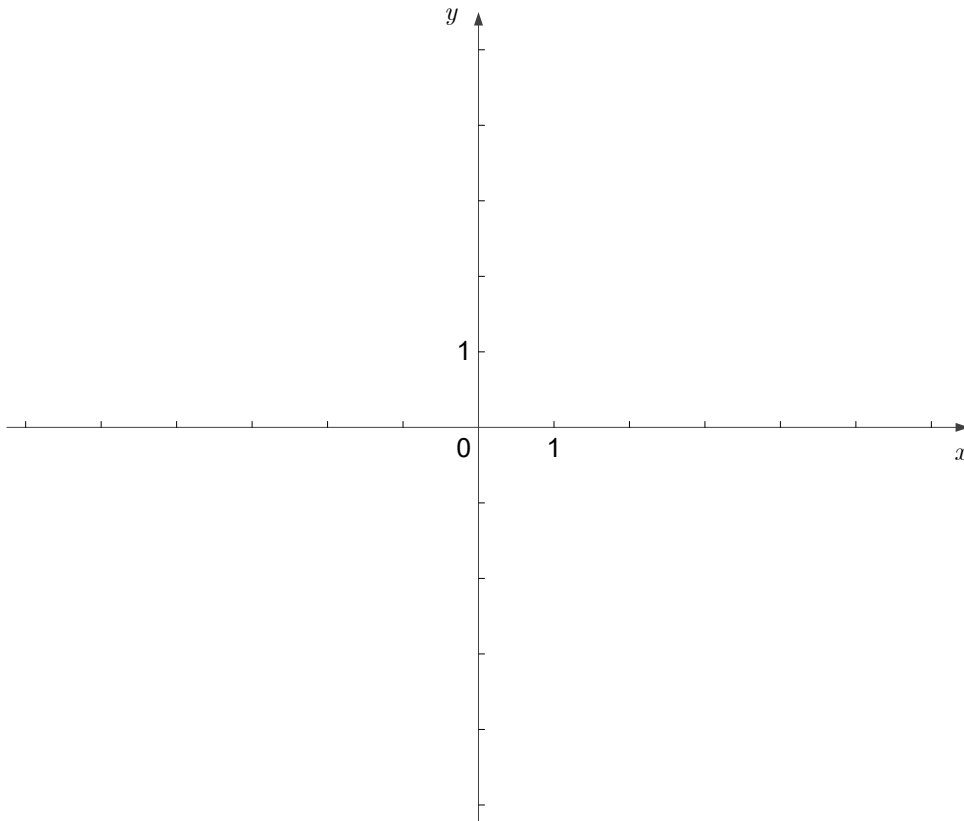
2. Calcolate la base  $a$  della funzione logaritmica  $f(x) = \log_a x$ , il cui grafico passa per il punto

$$A\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right).$$

(6 punti)



3. Calcolate gli zeri, i poli, il termine noto e l'asintoto della funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$  e tracciate il suo grafico. (Suggerimento: nella risoluzione del quesito non è necessario calcolare la derivata della funzione.)



(8 punti)





M 2 3 1 4 0 1 1 1 1 1 7

4. Sia  $\cos x = \frac{1}{3}$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ . Calcolate i valori esatti delle espressioni  $\sin x$  e  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

(6 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

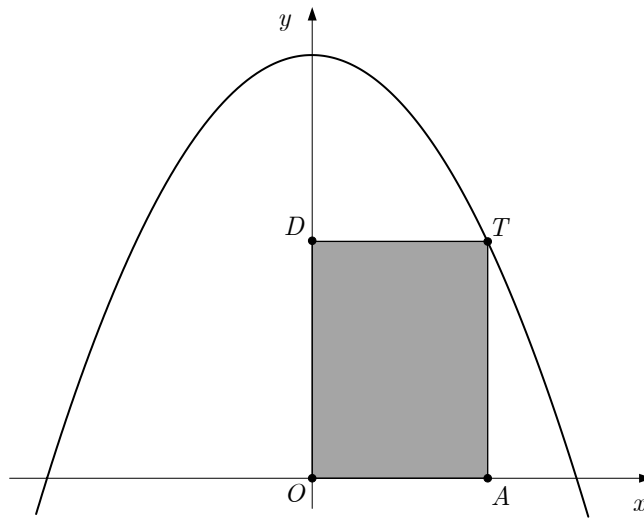


5. Verificate che il numero  $-1$  è uno zero doppio del polinomio  $p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 6x^2 - x - 2$ .  
Determinate inoltre i rimanenti due zeri.

*(7 punti)*



6. Il punto  $T$  giace nel primo quadrante sul grafico della funzione  $f(x) = 6 - x^2$  in modo che l'area del rettangolo  $OATD$  sia massima (v. figura). Calcolate l'area del rettangolo  $OATD$ .



(7 punti)



# Pagina di riserva