



Šifra kandidata:

Državni izpitni center



M 2 3 2 4 0 2 1 1

JESENSKI IZPITNI ROK

Višja raven

MATEMATIKA

==== Izpitna pola 1 ====

- B) Krajše strukturirane naloge
- C) Strukturirane naloge

Četrtek, 24. avgust 2023 / 90 minut (45 + 45)

Dovoljeno gradivo in pripomočki:

Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko in geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik).

Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Pri reševanju te izpitne pole uporaba računala ni dovoljena.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitsna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitsna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogu je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.



M 2 3 2 4 0 2 1 1 0 2



Formule

(Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom) Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ in za poljubno naravno

število n velja

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Euklidov in višinski izrek) Pravokotni trikotnik ima kateti a in b ter hipotenuzo c . Višina na hipotenuzo je v_c , pravokotna projekcija katete a na hipotenuzo je a_1 , pravokotna projekcija katete b na hipotenuzo pa b_1 . Tedaj velja $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$.

(Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga) Trikotnik ima stranice a, b in c , polovica obsega

je $s = \frac{a+b+c}{2}$, ploščina je S , polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je r in polmer

danemu trikotniku očrtanega kroga je R . Tedaj je $r = \frac{S}{s}$ in $R = \frac{abc}{4S}$.

(Heronova formula) Trikotnik ima stranice a, b in c , polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Tedaj je njegova ploščina $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

(Ploščina trikotnika) Naj bodo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči A, B in C je enaka $S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Krogla) Površina in prostornina krogle s polmerom r sta $P = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Razdalja točke od premice) Naj bodo $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ in naj a in b ne bosta oba enaka 0.

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice p , podane z enačbo $ax + by - c = 0$, je

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritem) Naj bosta $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Tedaj za vsak $x > 0$ velja $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Adicijski izreki) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Za poljubna $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, za katera je $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ in

$$\tan x \tan y \neq -1, \text{ velja } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Kotne funkcije polovičnih kotov) Za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

$$\text{Za poljuben } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z}\} \text{ velja } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



(Razčlenitev produkta kotnih funkcij) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Elipsa) Elipsa v ravnini ima polosi a in b ($a > b$), njena linearna ekscentričnost je e , njena

numerična ekscentričnost je ε . Tedaj velja $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Hiperbola) Hiperbola v ravnini ima realno polos a in imaginarno polos b , njena linearna

ekscentričnost je e , njena numerična ekscentričnost je ε . Tedaj velja $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola v ravnini z enačbo $y^2 = 2px$ ima gorišče v $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, enačba premice vodnice

dane parabole pa je $x = -\frac{p}{2}$.

(Aritmetično zaporedje) Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja (a_n) je $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

(Geometrijsko zaporedje) Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja (a_n) s kvocientom $q \in \mathbb{R}$

je $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, če je $q \neq 1$, in $S_n = na_1$, če je $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ in $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Nedoločeni integral) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj je za vsak $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{in} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integracija po delih) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volumen rotacijskega telesa) Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije f , abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, zavrtimo okrog abscisne osi za 360° , je
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

(Bernoullijeva formula) Naj bo p verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek A . Verjetnost, da se dogodek A v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko k -krat, je

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$



Konceptni list



Konceptni list

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



M 2 3 2 4 0 2 1 1 0 7

7/20

Konceptni list



Konceptni list

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



M 2 3 2 4 0 2 1 1 0 9

B) KRAJŠE STRUKTURIRANE NALOGE

1. Dani so vektorji $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 5, 3)$ in $\vec{c} = (x, 2, 4)$.

1.1. Izračunajte $2\vec{a} + \vec{b}$.

(2)

1.2. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(2)

1.3. Izračunajte dolžino vektorja \vec{b} .

(2)

1.4. Določite x tako, da bosta vektorja \vec{a} in \vec{c} pravokotna.

(2)

(8 točk)



2. V preglednici določite pravilnost (resničnost) ali nepravilnost (neresničnost) izjav tako, da v posamezni vrstici obkrožite DA, če je izjava pravilna, ali NE, če izjava ni pravilna.

Izjava	Pravilnost/nepravilnost izjave	
$i^2 = -1$	DA	NE
$ 3-4i = 25$	DA	NE
$\overline{3-4i} = 3+4i$	DA	NE
$i^{2022} = -1$	DA	NE
$\operatorname{Im}(3-4i) = -4i$	DA	NE
$\operatorname{Re}(3-4i) = 3$	DA	NE
$25(3-4i)^{-1} = 3+4i$	DA	NE

(7 točk)



3. Naj bosta a in b poljubni realni števili, $a > 0$ in $b \neq 0$. Vsak izraz v levem stolpcu preglednice je enak enemu izrazu v desnem stolpcu. Izrazi v desnem stolpcu so označeni s črkami od A do L.

V preglednici v za to namenjen prostor vpišite črko izraza, ki je enak izrazu v levem stolpcu preglednice (prva vrstica je že izpolnjena).

a^0	L
$(ab^2)^2$	
$(a+b^2)^2$	
$(ab^2):(ab)^3$	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{ab}$	
$\sqrt{b^2}$	

- (A) ab^4
(B) b
(C) $|b|$
(D) a^2b^4
(E) $a^{-2}b^{-1}$
(F) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}}$
(G) $a^2 + 2ab^2 + b^4$
(H) $\sqrt[5]{a^5b^5}$
(I) $a^2 + b^4$
(J) $a^{-3}b^{-1}$
(K) -1
(L) 1

(5 točk)



$$4. \text{ Rešite enačbo } \log(15-x) + \log(-x) = 2.$$

(7 točk)



M 2 3 2 4 0 2 1 1 1 3

5. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$.

Zapišite definicijsko območje funkcije f .

Zapišite enačbo vodoravne asimptote funkcije f .

Poščite predpis inverzne funkcije f^{-1} .

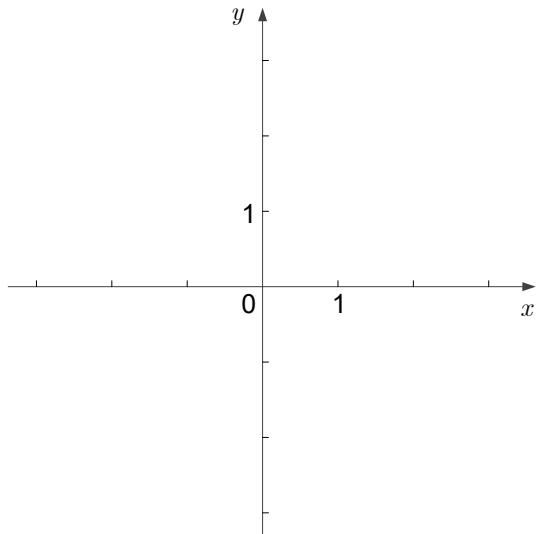
Zapišite zalogo vrednosti funkcije f .

(6 točk)



6. Naj bo a pozitivno realno število.

V istem koordinatnem sistemu skicirajte graf funkcije $f(x) = e^{ax}$ in premico $y = e$.



Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije f , premica $y = e$ in ordinatna os.

(7 točk)



Rezervna stran

OBRNITE LIST.



C) STRUKTURIRANE NALOGE

1. Dana je funkcija $f(x) = x \cdot e^{2x}$.

 - 1.1. Poiščite prvi odvod dane funkcije $f'(x)$ in pokažite, da je drugi odvod $f''(x) = 2e^{2x}(2x + 2)$. (2 točki)
 - 1.2. Zapišite vrednosti realnih števil a , b , c in d , da bodo za funkcijo f veljale naslednje trditve:
 - Število stacionarnih točk funkcije f je a .
 - f narašča na intervalu $[b, \infty)$ in pada na $(-\infty, b]$.
 - f je konkavna na intervalu $(-\infty, c]$ in konveksna na $[c, \infty)$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$.(4 točke)
 - 1.3. Naj bo $f'''(x)$ tretji odvod funkcije f (odvod drugega odvoda) in $f^{(4)}(x)$ njen četrti odvod. Poiščite $f'''(x)$ in pokažite, da je $f^{(4)}(x) = 8e^{2x}(2x + 4)$. (2 točki)
 - 1.4. Postavite domnevo za n -ti odvod funkcije $f^{(n)}(x)$ in jo dokažite s popolno indukcijo. (3 točke)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



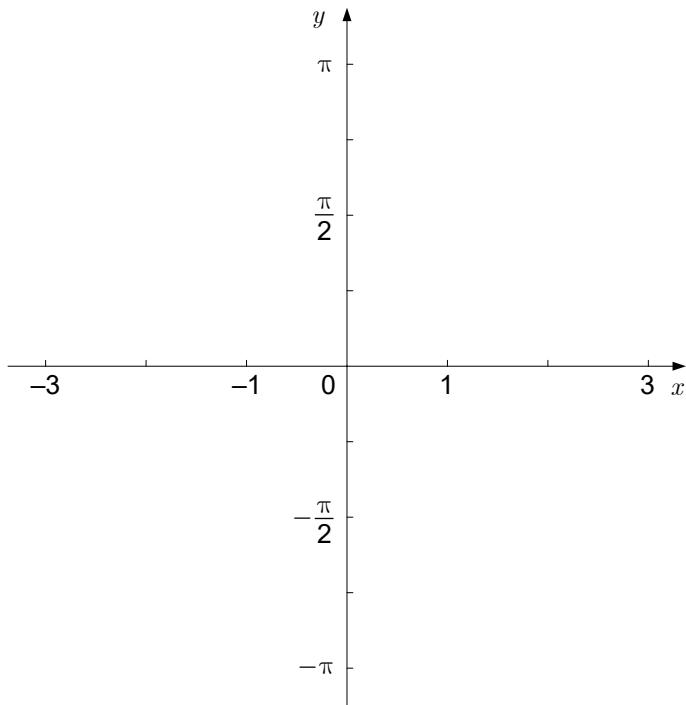
M 2 3 2 4 0 2 1 1 1 7

17/20



2. Dani sta funkciji $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \arcsin x$ in $g(x) = \cos x$.

2.1. Narišite graf funkcije f v dani koordinatni sistem.



(3 točke)

- 2.2. Izračunajte $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{20}\right)$.

(2 točki)

- 2.3. Rešite enačbo $g(x) - g(2x) + g(3x) = 1$.

(4 točke)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



M 2 3 2 4 0 2 1 1 1 9

19/20



Rezervna stran

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.