



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA

≡≡≡ Prova d'esame 2 ≡≡≡

B) Quesiti strutturati brevi
C) Quesiti strutturati

Sabato, 8 giugno 2024 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice.

Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli perforati della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Potete disegnare con la matita. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

**Formule**

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato

è r e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

(Formola di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area

$$\text{è } A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo

$$\text{di vertici } A, B \text{ e } C \text{ è uguale a } A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \text{ vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ vale $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formula di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 0 5

Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 0 7

Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large, empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 0 9

B) QUESITI STRUTTURATI BREVI

1. Sono date la funzione quadratica $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ e la funzione lineare $g(x) = 2x - 4$.
Calcolate le due intersezioni fra i loro grafici.

(6 punti)



2. Completate la tabella 1 scrivendo accanto a ciascuna proposizione il valore 1, se essa è vera, e il valore 0, se essa è falsa. Seguite l'esempio della prima riga.

Proposizione	Proposizione vera/falsa
I numeri primi sono infiniti.	1
$(A \setminus B) \subseteq A$	
Per i due insiemi finiti disgiunti A e B vale $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, dove $m(A)$ è la potenza dell'insieme A .	
Gli elementi dell'insieme potenza sono degli insiemi.	
Per il prodotto cartesiano vale che $A \times B = B \times A$.	

Tabella 1

Sia F una proposizione vera (1), e G invece una proposizione falsa (0). Completate la tabella 2 scrivendo accanto a ciascuna proposizione composta il valore 1, se essa è vera e il valore 0, se essa è falsa. Seguite gli esempi delle prime due righe.

Proposizione	Proposizione vera/falsa
F	1
G	0
$F \wedge G$	
$F \vee G$	
$(F \wedge G) \Rightarrow (F \vee G)$	

Tabella 2

(7 punti)



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 1 1

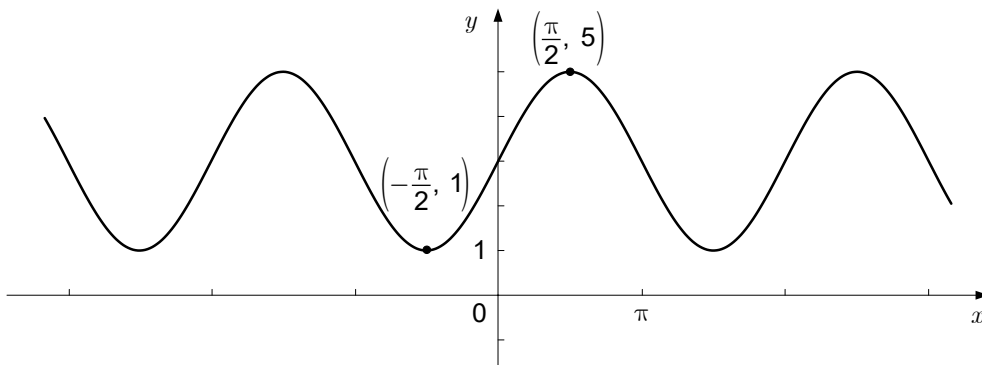
- Alja e Brina pesano complessivamente 99 kg, mentre Brina e Zoja pesano complessivamente 107 kg. Se Alja e Zoja salgono insieme sulla bilancia, questa indica 110 kg. Quanto pesa ciascuna ragazza? Scrivete la risposta.

(5 punti)



4. Risolvete i due quesiti seguenti:

- 4.1. La figura mostra una parte del grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la dipendenza $f(x) = A \sin x + C$, dove $A, C \in \mathbb{R}$. La funzione f ha il massimo relativo $M = 5$ e il minimo relativo $m = 1$. Determinate i numeri A e C .



(2)

- 4.2. È data la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la dipendenza $g(x) = -2 \sin x + 1$. Calcolate tutte le intersezioni del grafico della funzione g con la retta di equazione $y = 2$.

(5)

(7 punti)

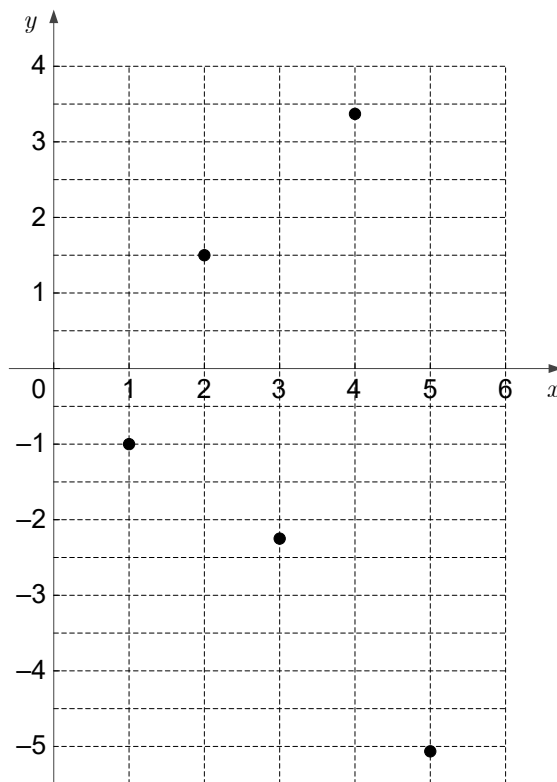


5. In un sistema di coordinate abbiamo i punti $A(5, 1)$ e $B(2, 3)$. Scrivete il vettore \overline{AB} con le coordinate (componenti). Calcolate le coordinate del punto C sulla bisettrice dei quadranti dispari in modo che valga $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

(7 punti)



6. Nel sottostante sistema di coordinate è disegnato il grafico di una successione geometrica infinita di termine generale a_n (i primi cinque termini).



Scrivete i primi due termini della successione.

Calcolate il quinto termine della successione.

Calcolate il più piccolo numero naturale n , per il quale la somma $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ sia maggiore di 500 000.

(8 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 1 5

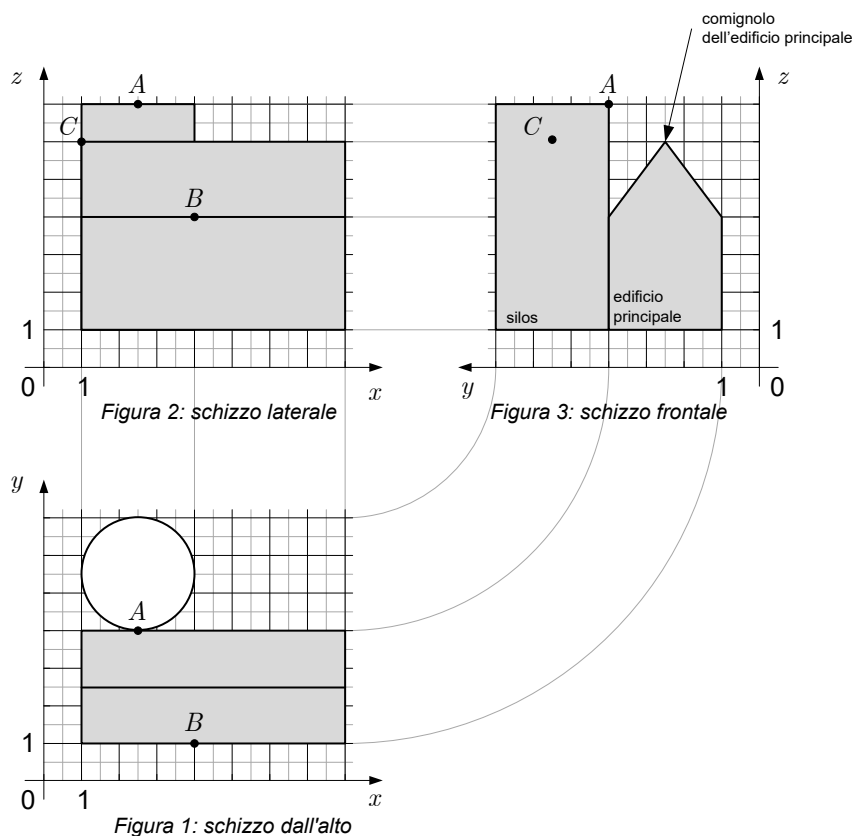
Pagina di riserva

VOLTATE IL FOGLIO.



C) QUESITI STRUTTURATI

1. Matjaž ha fotografato l'edificio principale e il silos senza il tetto di un'azienda a conduzione familiare dall'alto (usando una macchina fotografica fissata su un drone), frontalmente e lateralmente. In base alle foto ottenute ha disegnato lo schizzo del modello dell'edificio principale con il silos in tre sistemi di coordinate nel piano, e precisamente lo schizzo dall'alto (piano xy – figura 1), frontale (piano yz – figura 3) e laterale (piano xz – figura 2).



- 1.1. Scrivete le coordinate dei punti B e C , sapendo che il punto A ha le coordinate $A\left(\frac{5}{2}, 4, 7\right)$. (2 punti)
- 1.2. Matjaž deve imbiancare le pareti interne del silos per la disinfezione. Calcolate l'area delle pareti interne e del pavimento del silos. Potete reperire le misure esterne del silos dagli schizzi dati, le sue pareti e il pavimento hanno uno spessore di $0,1$. (3 punti)
- 1.3. Calcolate la pendenza del tetto dell'edificio principale. (2 punti)
- 1.4. Un corvo vola dal punto A sul silos al punto T sul comignolo dell'edificio principale percorrendo la distanza $\overline{AT} = \vec{s} = \left(x_0, -\frac{3}{2}, -1\right)$. Quali valori può acquistare la prima coordinata (componente) x_0 del vettore \vec{s} ? (3 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 1 7

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for handwritten input.



2. Lanciamo una moneta antica truccata, per la quale la probabilità che appaia lo stemma è 0,4.
- 2.1. Lanciamo la moneta consecutivamente sei volte. Qual è la probabilità degli eventi seguenti?
- A : Lo stemma appare esattamente cinque volte su sei lanci.
 B : Lo stemma appare almeno due volte in sei lanci.
- (4 punti)*
- 2.2. Peter e Rok lanciano la moneta alternandosi. Inizia Peter. Vince il primo dei due che realizza un lancio in cui appare lo stemma. Calcolate la probabilità dei seguenti eventi.
- R_1 : Rok vince al suo primo lancio.
 P_1 : Peter vince al suo primo lancio.
 P_2 : Peter vince al suo secondo lancio.
 P_3 : Peter vince al suo terzo lancio.
- Qual è la probabilità che Peter (il concorrente che lancia per primo) vinca in questo gioco?
- (6 punti)*

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 4 1 4 0 2 1 2 1 1 9

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for handwritten input.



Pagina di riserva