



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore MATEMATICA

≡ Prova d'esame 1 ≡

B) Quesiti strutturati brevi

C) Quesiti strutturati

Sabato, 7 giugno 2025 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta).

Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli perforati della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco standardizzato delle formule più impegnative che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Potete disegnare con la matita. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Le impostazioni delle soluzioni, svolte nei fogli per la minuta, non verranno sottoposte a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 5 1 4 0 2 1 1 0 3

Formule

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato

è r e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

(Formula di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area

$$\text{è } A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo

di vertici A, B e C è uguale a $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \text{ vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

$$\text{Per qualsiasi } x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \} \text{ vale } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formula di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.



**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**



(7 punti)



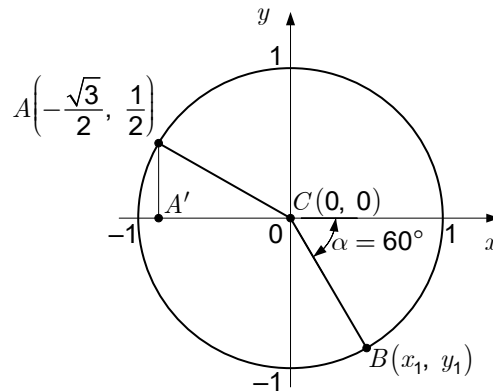
2. Calcolate il discriminante e determinate tutte le soluzioni delle sottostanti equazioni quadratiche. Scrivete i risultati nella tabella.

Equazione	Discriminante	Soluzioni dell'equazione
$x^2 - 6x + 9 = 0$		
$x^2 - 3x - 10 = 0$		
$x^2 - 6x + 10 = 0$		

(7 punti)



3. Nella figura è stata tracciata una circonferenza con centro nell'origine del sistema di coordinate e raggio 1. I punti A e B appartengono alla circonferenza, il punto A' è la proiezione ortogonale del punto A sull'asse delle ascisse, il punto C è l'origine del sistema di coordinate.



Calcolate i valori esatti delle coordinate sconosciute x_1 e y_1 del punto B nella figura.

Calcolate con esattezza il perimetro e l'area del triangolo $\triangle CAA'$.

(5 punti)



4. Siano $a = \log_5 2$ e $b = \log_5 3$. Esprimete i logaritmi $\log_5 6$, $\log_5 2\sqrt{3}$ e $\log_5 0,\overline{3}$ con a e b .

(6 punti)



5. È data la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$. Calcolate i due punti stazionari della funzione f . Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa -2 .

(7 punti)



6. La retta di equazione $y = 2x$ è l'asintoto dell'iperbole con centro nel punto $S(0, 0)$. I fuochi dell'iperbole giacciono sull'asse delle ascisse, il punto $A(\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$ appartiene all'iperbole.

Scrivete l'equazione dell'iperbole.

Proiettiamo l'iperbole data attraverso la bisettrice dei quadranti dispari. Scrivete l'equazione dell'iperbole simmetrica.

(8 punti)

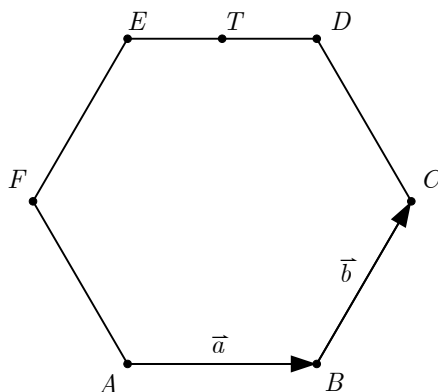


VOLTATE IL FOGLIO.



C) QUESITI STRUTTURATI

1. Nella figura sono stati tracciati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. La figura $ABCDEF$ è un esagono regolare con i lati di lunghezza una unità. Il punto T è il punto medio del segmento DE .

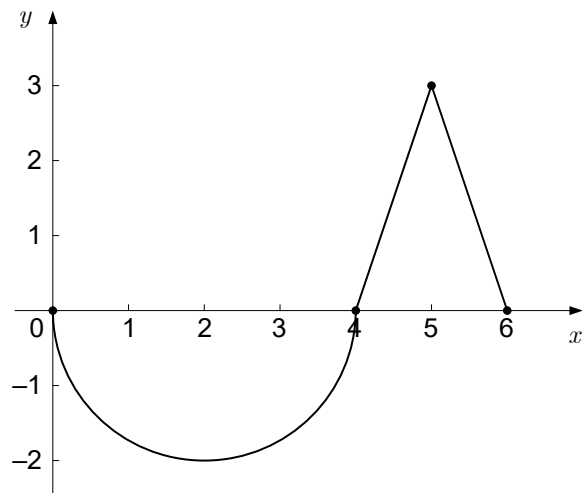


- 1.1. Esprimete i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BT}$ come combinazioni lineari dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e calcolate inoltre la lunghezza del segmento $|BT|$.
(2 punti)
- 1.2. I segmenti AC e BT si intersecano nel punto U . Calcolate il rapporto $|AU| : |UC|$.
(4 punti)
- 1.3. Siano $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{w} = 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$. Esprimete il vettore $\frac{7}{2}\vec{a} - \frac{7}{2}\vec{b}$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{w}$.
(4 punti)





2. La funzione f è espressa dalla dipendenza $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2 + 4x}; & 0 \leq x < 4 \\ 3x - 12; & 4 \leq x < 5 \\ -3x + 18; & 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$. Nel sistema di coordinate sottostante è stato tracciato il suo grafico.



- 2.1. Scrivete nella tabella i valori corrispondenti (vedi la prima riga già completata).

$\int_0^6 f(x) dx$	$-2\pi + 3$
$f\left(\frac{1}{2}\right)$	
$f\left(\frac{11}{2}\right)$	
$f'(1)$	
$f'\left(\frac{11}{2}\right)$	
$f''\left(\frac{9}{2}\right)$	
$\int_0^2 f(x) dx$	
$\int_4^6 f(x) dx$	

(7 punti)

- 2.2. Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow [-2, 3]$ una funzione periodica con il periodo minimo 6, che nell'intervallo $[0, 6]$ è uguale alla funzione f . Calcolate $\int_{-2022}^{2022} g(x) dx$. La funzione g è pari? Argomentate la risposta. Scrivete gli intervalli nei quali la funzione g è decrescente.

(3 punti)





Pagina di riserva