



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore **MATEMATICA**

≡ Prova d'esame 2 ≡

B) Quesiti strutturati brevi

C) Quesiti strutturati

Sabato, 7 giugno 2025 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice.

Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli perforati della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco standardizzato delle formule più impegnative che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Potete disegnare con la matita. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Le impostazioni delle soluzioni, svolte nei fogli per la minuta, non verranno sottoposte a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Formule

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato

è r e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

(Formula di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area

$$\text{è } A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici A, B e C è uguale a $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \text{ vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ vale $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua

eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità

lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta

direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di

ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \text{ e } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette

$x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formula di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità

che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

L



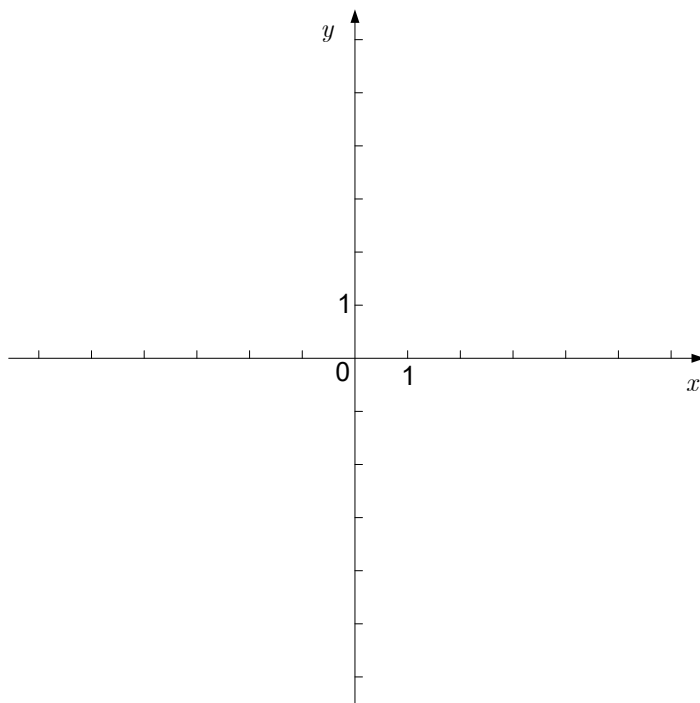
**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**

**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

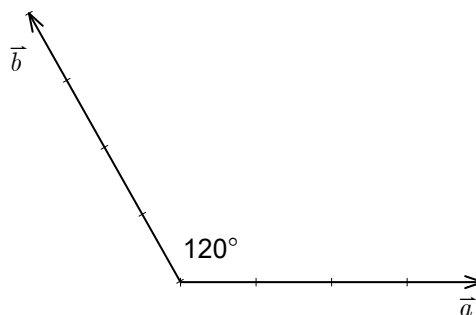
1. Tracciate le rette di equazione $y = -3$ e $y = -2x + 3$ e calcolate inoltre l'area del triangolo che le rette racchiudono con l'asse delle ordinate.



(6 punti)



2. Nella figura sottostante, i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono lunghi 4 unità, l'angolo tra di loro è 120° .
Disegnate lo schizzo del vettore $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ e calcolate i prodotti scalari $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e $\vec{a} \cdot \vec{c}$.



(8 punti)



3. Tiriamo due volte di seguito un dado non truccato. Calcolate la probabilità degli eventi:

A – ambedue le volte è uscito il sei,

B – almeno una volta è uscito il sei,

C – dopo ambedue i tiri la somma dei punti usciti era al massimo 5.

(8 punti)



4. I lati del triangolo ABC formano una successione aritmetica di ragione 3. Calcolate e scrivete le lunghezze dei lati del triangolo ABC , se il suo perimetro è 30. Calcolate inoltre con l'esattezza al primo di grado l'ampiezza dell'angolo maggiore del triangolo ABC .

(6 punti)



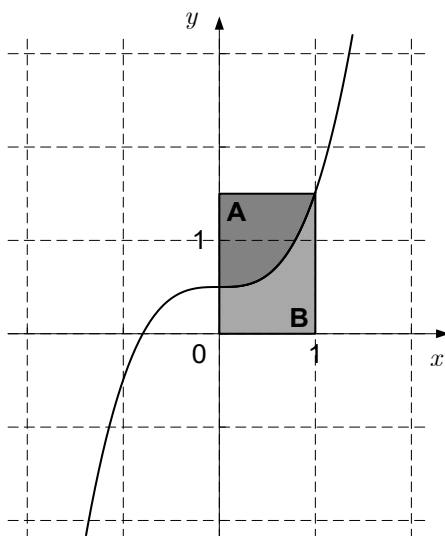
5. Ogni funzione della tabella ha esattamente una delle proprietà elencate. Cerchiatela. Nella prima riga c'è l'esempio risolto.

Dipendenza della funzione	Proprietà della funzione			
$f(x) = x^2 \sin x$	pari	<u>dispari</u>	crescente	decrescente
$g(x) = 2^{-x}$	pari	dispari	crescente	decrescente
$h(x) = \cos x$	pari	dispari	crescente	decrescente
$t(x) = \log_2 x$	pari	dispari	crescente	decrescente
$u(x) = x - 1$	pari	dispari	crescente	decrescente
$v(x) = x + \cos x$	pari	dispari	crescente	decrescente

(5 punti)



6. Nel sottostante sistema di coordinate è stata tracciata la curva di equazione $y = x^3 + a$. I settori indicati A e B nel rettangolo hanno la stessa area. Calcolate a .



(7 punti)

L



0



**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. Sono date le successioni di termini generali $a_n = \sqrt{4n^2 - n}$ e $b_n = 2n$.
- 1.1. Quanti termini della successione di termine generale $c_n = \frac{1}{a_n}$ sono maggiori di 0,01?
(3 punti)
- 1.2. Calcolate il limite della successione di termine generale $d_n = a_n - b_n$.
(3 punti)
- 1.3. Dimostrate che la successione di termine generale $g_n = \frac{b_n}{a_n^2}$ è decrescente. Determinate il limite inferiore esatto e il limite superiore esatto di tale successione.
(4 punti)





2. Risolvete i due quesiti sottostanti (indipendenti).

- 2.1. In un campo da gioco, il cui perimetro misura 400 m, iniziano a correre nello stesso istante e dallo stesso punto, sull'orlo esterno del campo, due atleti. Il primo corre in direzione positiva alla velocità costante $v_1 = 2 \text{ ms}^{-1}$, il secondo invece in direzione negativa alla velocità costante $v_2 = 3 \text{ ms}^{-1}$. Quante volte si incontreranno i due atleti se corrono per 10 minuti?

(4 punti)

- 2.2. Si sta progettando la costruzione di un campo sportivo che dovrebbe avere la forma data in figura. L'area della parte centrale del campo sportivo, del rettangolo $ABCD$, misura 6000 m^2 , i lati più corti del rettangolo sono delimitati da due semicerchi. Quanto dovrebbero misurare la lunghezza della parte lineare del campo sportivo $x = |AB|$ e quella del raggio degli archi $r = \frac{|AD|}{2}$, per fare in modo che un atleta abbia percorso la distanza più corta possibile, quando completa un giro correndo lungo il bordo esterno del campo sportivo?



(6 punti)



A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. This area is designated for the user to provide answers or additional information.



Pagina di riserva