Ljubljana 2019

MATEMATIKA

Általános érettségi tantárgyi vizsgakatalógus ◄

► Splošna matura

A tantárgyi vizsgakatalógus a **2021**. évi tavaszi vizsgaidőszaktól érvényes az új megjelenéséig. A katalógus érvényességéről mindig a folyó évi Általános érettségi vizsgakatalógus rendelkezik abban az évben, amikor a jelölt érettségi vizsgát tesz.

ric
Državni izpitni center

ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI TANTÁRGYI VIZSGAKATALÓGUS – MATEMATIKA
A Matematika Általános Érettségi Országos Tantárgyi Bizottsága

Prevod izvirnika: PREDMETNI IZPITNI KATALOG ZA SPLOŠNO MATURO – MATEMATIKA

A katalógust elkészítették:
dr. Iztok Banič
mag. Jaka Erker
Mateja Fošnarič
mag. Alojz Grahor
Tatjana Levstek
mag. Mateja Škrlec
ddr. Janez Žerovnik

Bírálták:
dr. Damjan Kobal
Mirko Škof

Magyar nyelvre fordította:
Silvija Vučak Virant
Tadina Bence Virág

A magyar fordítás lektora:
dr. Merényi Annamária
dr. Anna Kollath

A vizsgakatalógust a Szlovén Köztársaság Közoktatási Szaktanácsa a 2019. június 20-i, 200. ülésén fogadta el, és a 2021. évi tavaszi vizsgaidőszaktól az új vizsgakatalógus hatályba lépéséig érvényes. A katalógus érvényességéről az adott évben az az évi Általános érettségi vizsgakatalógus rendelkezik.

Kiadta:
Državni izpitni center

Képviselő:
dr. Darko Zupanc

Szerkesztő:
mag. Aleš Drolc
dr. Andrejka Slavec Gornik
Joži Trkov

Tördelés:
Martina Dernulc

Ljubljana 2019

ISSN 2232–4666

TARTALOMJEGYZÉK

1 BEVEZETŐ

A matematika általános érettségi tantárgyi vizsgakatalógus (a továbbiakban katalógus) *Az érettségi vizsgáról* szóló törvény és a megfelelő jogszabályok, valamint *A vizsgák és tantárgyi vizsgakatalógusok szerkezetéről szóló* tanácsi határozatok értelmében leírja a tantárgyból teendő vizsgát, amelyek az érvényes Érettségi vizsgakatalógusban vannak rögzítve. A matematika az általános érettségi vizsga kötelező tantárgya. A vizsga tartalma és a célja a gimnáziumi[1] matematika tanmenet tartalmát és céljait követi, amelyek meghatározzák az elemi, magasabb szintű és választható tartalmakat. Matematikából az általános érettségi vizsga alapszinten (ASZ), illetve emelt szinten (ESZ) végezhető el. Alapszinten az elemi szintű ismeretek ellenőrizhetők, emelt szinten pedig az elemi és a magasabb szintű ismeretek. A ⇨ jel azokat a tartalmakat és célokat jelöli, amelyeket csak ESZ-en ellenőriznek.

[1] *Učni načrt. Matematika* [Elektronski vir]: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur)/predmetna komisija Amalija Žakelj ... [et al.]. - Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo, 2008. http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2012/programi/gimnazija/ucni_nacrti.htm

2 A VIZSGA CÉLJAI

Az általános érettségi vizsga felméri, hogy a jelölt[2] képes-e:

- matematikai szövegeket olvasni, és az ilyen szöveget értelmezni;
- pontosan bemutatni a matematikai tartalmakat írásban, táblázatok, grafikonok vagy diagramok formájában;
- számítási feladatokat végezni, meghatározott pontossággal felírni az eredményt, és képes annak érvényességét megítélni;
- a számításnál alkalmazni a megfelelő módszert;
- alkalmazni a megfelelő technológiát matematikai problémák megoldásakor;
- az alapvető eszközöket alkalmazni a szerkesztésnél;
- értelmezni, átalakítani és helyesen alkalmazni a szavakkal vagy szimbólumokkal bemutatott matematikai kijelentéseket;
- felismerni és alkalmazni a kölcsönös viszonyokat a sík- és a térgeometriai elemek között;
- logikusan következtetni az adott matematikai adatokból;
- felismerni a mintákat és a struktúrákat különböző helyzetekben;
- elemezni a problémákat, és kiválasztani a megoldás meghatározásának megfelelő módjait;
- meglátni és felhasználni a különböző matematikai területek kölcsönösségét;
- alkalmazni a különböző matematikai technikák kombinációját a problémák megoldásában;
- logikusan és érthetően bemutatni a matematikai dolgozatot megfelelő szimbolika és terminológia alkalmazásával;
- a matematikát alkalmazni a mindennapi életben;
- a matematikát kommunikációs eszközként alkalmazni, hangsúlyozva a pontos kifejezés fontosságát.

[2] A tantárgyi vizsgakatalógusban hímnemű főneveket alkalmaztunk, melyek értelemszerűen kapcsolódnak az általános, közös megnevezésekhez (pl. a jelölt, a vizsgáztató). Ezek mind a női, mind pedig a férfi jelöltekre vonatkoznak.

3 A VIZSGA SZERKEZETE ÉS ÉRTÉKELÉSE

3.1 A vizsga szerkezete

A vizsga szerkezete az alapszinten és az emelt szinten megegyezik.

► Írásbeli vizsga – a vizsga külső része

Feladatlap	Megoldási idő	Összesített osztályzat része	Értékelés	Engedélyezett eszközök	Melléklet
1	90 perc	40%	külső	töltőtoll ill. golyóstoll, ceruza, radír és geometriai eszközök[3]	A képletmelléklet a feladatlap része.
2	90 perc	40%	külső	töltőtoll ill. golyóstoll, ceruza, radír, geometriai eszközök[3] és számológép[4]	A képletmelléklet a feladatlap része.
Összesen	**180 perc**	**80%**			

Az 1. feladatlap megírásának befejezése után, vagyis a 2. feladatlap írásának megkezdése előtt 30 perces szünet van.

► Szóbeli vizsga – a vizsga belső része

	Megoldási idő	Összesített osztályzat része	Értékelés	Engedélyezett eszközök
3 kérdés	Max. 20 perc	20%	belső	töltőtoll ill. golyóstoll, ceruza, radír és geometriai eszközök[3]
Összesen	**Max. 20 perc**	**20%**		

[3] Körző és vonalzó (lehet háromszögű is).

[4] A számológép olyan elektronikus számológép, amely lehetővé teszi az alapműveletek elvégzését és nem támogatja a következőket:
– kommunikációt a környezettel illetve a »külvilággal«,
– adatok elmentését a környezetből illetve külvilágból,
– előre elkészített adatok mentését,
– szimbólumos számításokat,
– új függvények beprogramozását,
– függvénygrafikonok rajzolását.

3.2 Feladattípusok és értékelés

ÍRÁSBELI VIZSGA

Az alapszintű és az emelt szintű írásbeli vizsga eltér egymástól mind a tartalom, mind a feladattípusok és a feladatok nehézsége alapján, valamint a taxonómiai szintek arányait tekintve is.

► Alapszint

Feladatlap	Feladattípus	A feladatok száma	Értékelés
1	A rövid feladatok	8	minden feladat max. 3 pontos összesen 20 pont
	B rövidebb strukturált feladatok	6	minden feladat 5-től 8 pontos összesen 40 pont
			Összesen 60 pont
2	A rövid feladatok	8	minden feladat max. 3 pontos összesen 20 pont
	B rövidebb strukturált feladatok	6	minden feladat 5-től 8 pontos összesen 40 pont
			Összesen 60 pont
Összesen			**120 pont**

► Emelt szint

Feladatlap	Feladattípus	A feladatok száma	Értékelés
1	B rövidebb strukturált feladatok	6	minden feladat 5-től 8 pontos összesen 40 pont
	C strukturált feladatok	2	minden feladat 9-től 11 pontos összesen 20 pont
			Összesen 60 pont
2	B rövidebb strukturált feladatok	6	minden feladat 5-től 8 pontos összesen 40 pont
	C strukturált feladatok	2	minden feladat 9-től 11 pontos összesen 20 pont
			Összesen 60 pont
Összesen			**120 pont**

SZÓBELI VIZSGA

Az alapszintű és az emelt szintű szóbeli vizsga tartalmuk alapján, a feladatok nehézsége alapján, valamint a taxonómiai szintek arányai alapján is eltér egymástól.

► Alapszint és emelt szint

Feladattípus	A feladatok száma	Értékelés
kérdés	3	minden kérdés 6 pontos
korrekt matematikai kifejezésód		2 pont
Összesen		**20 pont**

3.3 A vizsga és az egyes részek értékelésének kritériumai

3.3.1 A taxonómiai szintek arányai

A következő táblázatban található százalékok az I., II. vagy III. taxonómiai szinthez tartozó feladatok, feladatrészek vagy kérdések arányát mutatják be az egyes vizsgarészekben.

A taxonómiai szintek	1. és 2. feladatlap (ASZ)	1. és 2. feladatlap (ESZ)	Szóbeli vizsga (ASZ)	Szóbeli vizsga (ESZ)
I. ismeretanyag	legalább 30%	legalább 20%	legalább 30%	legalább 20%
II. megértés és alkalmazás	40–60%	40–60%	40–60%	40–60%
III. önálló interpretálás, értékelés, az új problémák önálló megoldása	maximum 30%	maximum 40%	maximum 30%	maximum 40%
Összesen	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

3.3.2 Az egyes vizsgarészek értékelésének kritériumai

► Írásbeli vizsga

A feladatokat az értékelési utasítások alapján értékelik. A megoldási folyamat egyes lépéseit pontozzák. A feladat megoldásában világosan és helyesen be kell mutatni a megoldásig vezető utat a közbeeső számításokkal és következtetésekkel együtt. A szerkesztési feladatok megoldásakor a jelölteknek a geometriai eszközöket kell használniuk.

► Szóbeli vizsga

Az iskolai vizsgabizottság a vizsgalapon szereplő három feladat mindegyikét legalább 0 és legfeljebb 6 ponttal értékelheti az értékelési utasítások alapján.

A matematikailag korrekt kifejezésmódra a jelölt összesen legfeljebb 2 pontot kaphat.

3.3.3 Összesített osztályzat

A vizsga összesített osztályzatát az egyes vizsgarészek százalékpontjának összege alapján határozzák meg. Az 1. feladatlapnál a jelölt legfeljebb 40 százalékpontot kaphat, a 2. feladatlapnál is legfeljebb 40 százalékpontot, és a szóbeli résznél legfeljebb az érettségi vizsga 20 százalékpontját. Az Általános Érettségi Országos Bizottság az Általános Érettségi Országos Tantárgyi Bizottság javaslatára meghatározza a százalékpontok osztályzatokra (1–5) való átváltásának kritériumait, emelt szinten pedig a százalékpontok szerinti pontozás (1–8) átváltásának kritériumait is. Ezek a kritériumok a tavaszi és az őszi vizsgaidőszakban azonosak.

4 A VIZSGA TARTALMA ÉS CÉLJAI

A folytatásban olvasható vizsgatartalmak és célok követik az érvényes matematika tantervet, amely a tudásanyagot elemi, magasabb szintű és választható tartalmakra osztja. Az általános érettségi alapszinten az elemi szintű tudásanyagot és célokat méri fel. Emelt szinten az elemi és magasabb szintű tudásanyagot ellenőrzik. Az érettségin a választható tartalmakat nem ellenőrizzük.

A ⇨ jel jelöli azokat a tartalmakat és célokat, melyeket csak az emelt szintű vizsgán ellenőriznek.

4.1 A logika alapjai

Tartalom	Célok
	A jelölt:
Kijelentések és kapcsolatok közöttük	– felírja a kijelentést,
Összetett kijelentések	– meghatározza a kijelentés logikai értékét,
A műveletek sorrendje	– szimbólumokkal felírja az összetett kijelentést,
Tautológia	– kiszámítja az összetett kijelentés logikai értékét az elemi kijelentések összes értékeinél,
Egyenértékű (ekvivalens) kijelentések	– megállapítja két kijelentés egyenértékűségét.

4.2 Halmazok

Tartalom	Célok
	A jelölt:
Alapfogalmak: elem, halmaz, az elem halmazba tartozása, részhalmaz, üres halmaz, alaphalmaz	– ismeri az alapfogalmakat, szimbólumokkal jelöli az elemek és a halmazok közti viszonyokat,
Szimbólumokkal való felírás	– különböző módokat alkalmaz a halmazok szemléltetésére,
Venn-diagram	– számít a halmazokkal,
Metszet, unió, különbség, a komplementer halmaz	– megkeresi egy véges halmaz hatványhalmazát,
⇨ A halmazműveletek jellegzetességei	– megrajzolja két halmaz Descartes-féle szorzatának grafikonját,
Hatványhalmaz	– alkalmazza két vagy három halmaz uniójának a számosságára vonatkozó képletét, valamint a véges halmazok Descartes-féle szorzatának képletét.
Descartes-féle szorzat	
A halmaz számossága	
⇨ A hatványhalmaz számossága	

4.3 Számhalmazok

Tartalom | **Célok**

4.3.1 Természetes számok és egész számok

Tartalom	Célok
	A jelölt:
A számtani műveletek és tulajdonságaik	– ismeri a természetes számok jelentését, és az egész számok bevezetésének az okát, valamint az alkalmazásuk néhány példáját,
Prímszámok és összetett számok	– alkalmazza a számtani műveleteket a természetes és az egész számok halmazán, valamint példák alapján indokolja a műveletek tulajdonságát,
⇨ Matematikai indukció	– szemlélteti a természetes és az egész számokat a számegyenesen,
Decimális helyiértékes írásmód	– ⇨ induktív módon következtet, általánosít, az általánosítást bebizonyítja, illetve cáfolja, és matematikai indukció segítségével bizonyít,
A 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 8-cal, 9-cel és 10-zel való oszthatóság kritériumai	– az egész számokra alkalmazza a decimális helyiértékes írásmódot,
Az oszthatósági reláció	– indokolja és alkalmazza az alapvető oszthatósági szabályokat,
A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös	– ismeri és alkalmazza az oszthatósági reláció jellegzetességeit,
A maradékos osztás alaptétele	– meghatározza két vagy több egész szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét,
⇨ Az euklideszi algoritmus, valamint a D és a v közti kapcsolat	– alkalmazza az egész számok maradékos osztásának alaptételét,
A tízes számrendszer	– ⇨ alkalmazza az euklideszi algoritmust a legnagyobb közös osztó keresésére,
⇨ A kettes számrendszer	– ⇨ nehezebb feladatokban alkalmazza a $Dv = ab$, kapcsolatot,
	– ⇨ alkalmazza a tízes számrendszer és a kettes számrendszer közti átalakítást;

4.3.2 Racionális számok

Tartalom	Célok
A számtani műveletek és ezek tulajdonságai	– ismeri és indokolja a racionális számok bevezetésének okát,
A racionális számok tizedes törttel való felírása	– szemlélteti a racionális számokat a számegyenesen,
Részek és százalékok	– számol racionális számokkal,
Százalékszámítás	– indokolja és alkalmazza a racionális számok tizedes törttel való felírását, és megkülönbözteti a tizedes törteket és az egyéb törteket,
	– számol tizedes törtekkel,
	– alkalmazza a részeket és a százalékokat, valamint a százalékszámítást a mindennapi feladatokban, és ügyesen használja a számológépet;

4.3.3 Valós számok

Tartalom	Célok
Irracionális számok	– ismeri és indokolja a valós számok bevezetésének okát,
Valós számok a számegyenesen (a valós tengelyen)	– felsorolja néhány irracionális szám példáját,
Intervallumok	– Pitagorasz-tétel segítségével megszerkeszt néhány négyzetgyököt irracionális szám példájaként,
Véges tizedes tört alakú közelítő értékek	– a számegyenest valós tengelyként értelmezi,
A valós szám abszolút értéke és jellegzetességei	– kerekíti a tizedes törteket,
Egyenletek abszolút értékkel	– összekapcsolja a valós számok abszolút értékének mértani és analitikus bemutatását,
⇨ Egyenlőtlenségek abszolút értékkel	– egyszerűsíti az abszolút értékes kifejezéseket, és megold egyszerű egyenleteket,
Az abszolút és a relatív hiba	– ⇨ megold a valós számok abszolút értékeit tartalmazó egyszerű egyenlőtlenségeket,
	– összehasonlítja az abszolút és a relatív hiba jelentését, és megítéli két adat összegének, különbségének, szorzatának és a hányadosának abszolút és relatív hibáját;

4.3.4 Komplex számok

Tartalom	Célok
A komplex számok mértani ábrázolása a komplex számsíkban	– ismeri és indokolja a komplex számok bevezetésének okát,
Számtani műveletek és ezek jellegzetességei	– szemlélteti a komplex számot a komplex számsíkban,
Valós együtthatós egyenletek megoldása	– analitikus és grafikus módon összeadja és kivonja a komplex számokat,
	– szorozza a komplex számokat,
	– levezeti az i szám hatványainak számítási szabályát,
	– meghatározza a konjugált szám analitikus és mértani jelentése közti kapcsolatot,
	– meghatározza a komplex szám abszolút értékének analitikus és mértani jelentése közti kapcsolatát,
	– levezeti és alkalmazza a komplex számok osztásának a szabályát,
	– kiszámítja a komplex szám inverz értékét,
	– megkeresi az egyenletek komplex megoldásait is.

4.4 Algebrai kifejezések, egyenletek és egyenlőtlenségek

Tartalom	**Célok**
	A jelölt:
Számtani műveletek kifejezésekkel Kifejezések hatványozása Kifejezések tényezőkre bontása Törtekkel való számítás Egyenletek és egyenlőtlenségek Lineáris egyenletek Gyöktényezős alakú egyenletek ⇨ Paraméteres lineáris egyenlet Lineáris egyenlőtlenség ⇨ Paraméteres lineáris egyenlőtlenség	– összehasonlítja és megkülönbözteti a kifejezés és az egyenlet, valamint a változó és az ismeretlen alakját és jelentését, – az algebrai kifejezéseket összeadja és kivonja, – alkalmazza és megindokolja a kéttagú algebrai kifejezés négyzetének és köbének szabályait, – a Pascal-féle háromszög segítségével meghatározza a kéttagú algebrai kifejezések magasabb rendű hatványait, és ezeket alkalmazza is, – felismeri és alkalmazza az adott kifejezés megfelelő tényezőkre való bontási módját: kiemelés, a négyzetek különbsége, a köbök összege és különbsége, *Viète*-képlet, négytagú algebrai kifejezés tényezőkre bontása, – ⇨ tényezőkre bontja: $a^n \pm b^n$, – algebrai törtekkel számol (mind a négy számtani művelet és a zárójeles kifejezések), – alkalmazza az ekvivalens átalakítások szabályait az egyenletek esetében, és ezeket az egyenleteket ügyesen megoldja, – felismeri és megoldja a lineáris egyenletet, – felismeri és megoldja a gyöktényezős alakú egyenleteket, – ügyesen kifejezi az ismeretleneket a különböző fizikai és kémiai egyenletekből, – ⇨ elemzi a paraméteres lineáris egyenleteket, – alkalmazza az ekvivalens átalakítások szabályait az egyenlőtlenségek esetében, és az egyenlőtlenség megoldási lépéseit indokolja, – felismeri és megoldja a lineáris egyenlőtlenséget, – ⇨ elemzi az egyszerű paraméteres lineáris egyenlőtlenségeket.

4.5 Hatványok és gyökök

Tartalom	**Célok**
	A jelölt:
Természetes kitevőjű hatványok Egész kitevőjű hatványok n-edik gyök Racionális kitevőjű hatványok ⇨ Irracionális egyenletek	– indokolja és alkalmazza a természetes kitevőjű hatványokkal való műveletek szabályait, – indokolja és alkalmazza az egész kitevőjű hatványokkal való műveletek szabályait, és ezeket összehasonlítja a természetes kitevőjű hatványokkal való műveletek szabályaival,

Tartalom	Célok
	– megmagyarázza az a^{-1} és az a^{-n} felírások jelentését, – alkalmazza a négyzetgyök gyökvonási szabályait, – megoldja az $x^2 = a, a > 0, a \in \mathbb{R}$ alakú másodfokú egyenleteteket tényezőkre bontással és gyökvonással, – összehasonlítja és indokolja az egyszerű $x^n = a, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ alakú egyenletek megoldását a valós számok halmazában gyökvonás segítségével és tényezőkre bontással, – megmagyarázza és alkalmazza a $\sqrt{x^2} = \|x\|$ kapcsolatot, – pontosan kiszámítja a valós számok köbgyökeit (fejből) és számológép segítségével, – megkülönbözteti a valós szám n-dik gyökének létezésére vonatkozó feltételeket (a kitevő és az alap szempontjából), – ügyesen alkalmazza a számológépet az n-dik gyökök kiszámítására, – átalakítja az n-dik gyök felírását racionális kitevőjű hatvány felírására, – összekapcsolja és összehasonlítja az n-edik gyökökkel való feladatok megoldását a racionális kitevőjű hatványokkal való feladatok megoldásával, – ⇨ felismeri az irracionális egyenletet, és megoldja azt, valamint indokolja az irracionális egyenlet megoldásának lépéseit, és értelmezi a megoldásokat.

4.6 A sík- és a térgeometria

Tartalom	Célok
	A jelölt:
Pontok, egyenesek és körök a síkban	– elsajátítja az elemi euklideszi geometria fogalmait,
Távolság, szakasz, szakasz meghosszabbításával keletkező egyenes, szimmetriatengely, félegyenes, szög	– elsajátítja a geometriai szemléletet, és gyakorlatban megismeri a matematikai elmélet alapvető standardjait,
A szögek fajtái és a szögek közti viszonyok	– ismeri a definíciókat, és alkalmazza a mértani elemek jellegzetességeit,
Háromszög, sokszög A háromszög nevezetes pontjai	– alkalmazza a háromszög belső és külső szögei közti kapcsolatokat, valamint a háromszög oldalai és szögei közti viszonyokat is,
Távolságtartó transzformációk és az egybevágóság	– alkalmazza az ugyanazon ív fölötti középponti és kerületi szögek közti kapcsolatot,
Párhuzamos eltolás, tükrözés, elforgatás, a háromszög orientációja (körüljárási iránya)	– meg tudja különböztetni az egybevágó és a hasonló háromszögeket,

Tartalom	Célok
Merőleges vetület A középponti és a kerületi szögek Szögek a félkörben Középpontos nagyítás/zsugorítás, hasonlóság A derékszögű háromszög tételei Paralelogramma, rombusz, trapéz Szerkesztési feladatok A koszinusztétel és a szinusztétel ⇨ A tér ponthalmazai Az egyenesek és a síkok párhuzamossága és merőlegessége a térben Az egyenes merőleges vetülete a síkra	– alkalmazza a derékszögű háromszög tételeit, – megszerkeszti geometriai eszközökkel a mértani elemeket ⇨ valamint a dinamikus geometria programjaival is, – elsajátítja és alkalmazza a tetszőleges háromszög oldalai és szögei közti kapcsolatokat, melyeknél alkalmazza a koszinusz- és szinusztételt, – az IKT (Információs és Kommunikációs Technológia) alkalmazásával kutatja a geometriai problémákat, – kifejleszti a térbeli pontok, egyenesek és síkok közti viszonyok szemléletét.

4.7 Mértani síkidomok és testek

Tartalom	Célok
A mértani síkidomok területe, Héron képlete A háromszögbe írt kör és a háromszög köré írt kör sugara Mértani testek: hasáb, henger, gúla, kúp, gömb Az egyenes hasáb, henger, gúla, kúp és gömb felszíne és térfogata ⇨ Cavalieri-elv ⇨ Ferde testek ⇨ Forgástestek Geometriai matematikai problémák	A jelölt: – képes elsajátítani és továbbfejleszteni a geometriai szemléletét, – az egyes mennyiségek kifejezésére képleteket alkalmaz, – kritikusan felbecsüli és megítéli a kapott értékeket, ügyel a mértékegységek pontosságára, – alkalmazza a síkgeometria területén elsajátított tudását, és megoldja azokat a problémákat, melyek kapcsolatban vannak a háromszögbe írt kör és a háromszög köré írt kör sugarával, – leírja a mértani testet, – alkalmazza az elsajátított tudást a szögfüggvényekről és a geometriáról a mértani testek modelljein, – geometriai problémákat old meg a testek felszínével és térfogatával kapcsolatban, valamint kritikusan felbecsüli és megítéli a kapott eredményeket és mértékegységeket, – ⇨ megoldja a ferde testeket tartalmazó geometriai problémákat, – ⇨ meghatározza az elforgatás tengelyét, és elemzi a kapott forgástestet a kiválasztott tengely szempontjából, – ⇨ problémákat old meg a forgástestek térfogatával kapcsolatban, – felismeri a geometriai problémát, azt bemutatja, megállapítja, melyik fogalmakkal, változókkal és ezek közti kapcsolatokkal lehetne azt megoldani, megoldja a problémát, a megoldásokat bemutatja, és gondolkozik ezek értelmességéről,

Tartalom	Célok
	– a geometriai problémák megoldásánál önállóan kiválasztja és alkalmazza a megfelelő stratégiákat, valamint összekapcsolja a síkbeli és a térbeli geometria tartalmait, – megoldja a geometriai problémákat a trigonometria segítségével.

4.8 Sík- és térbeli vektorok

Tartalom	Célok
	A jelölt:
A vektorok meghatározása	– megrajzolja a vektorokat, grafikus módon összeadja és kivonja a vektorokat, valamint szorozza ezeket számmal,
Összeadás, szorzás számmal (erők) – grafikus szemléltetés	– elsajátítja a vektorszámítást grafikusan és analitikusan,
Kollinearitás, komplanaritás – grafikus szemléltetés	– megítéli a vektorok kollinearitását és komplanaritását,
A vektorok felírása a bázis koordinátáival (az erő felosztása komponensekre), merőleges vetület – grafikus szemléltetés	– ⇨ megítéli a vektorok lineáris függetlenségét,
A vektorok lineáris kombinációja	– számol a koordinátákkal (komponensekkel) felírt vektorokkal,
⇨ A vektorok lineáris függetlensége	– kiszámítja a vektorok által bezárt szöget, a vektor hosszát, valamint a vektor merőleges vetületét,
A sík és a tér bázisa	– indokolja a vektorok merőlegességét és párhuzamosságát,
A derékszögű koordináta-rendszer a síkban és a térben, a pont helyvektora	– érti a merőlegességet a térben.
A vektorok felírása koordinátákkal (komponensekkel)	
Műveletek koordinátákkal (komponensekkel) felírt vektorokkal	
A vektor merőleges vetülete egy másik vektorra	
Skaláris szorzat, két vektor által közbezárt szög és a vektor hossza	
⇨ A vektorszámítás alkalmazása a háromszögben és a paralelogrammában, arányok, súlypont	
A skaláris szorzat és a koszinusztétel összefüggése	

4.9 Derékszögű koordináta-rendszer a síkban

Tartalom

Ponthalmazok a síkban

Pontok távolsága a sík koordináta-rendszerében

A háromszög területe

Célok

A jelölt:

- alkalmazza a derékszögű koordináta-rendszert a síkban,
- leolvassa és megrajzolja a sík ponthalmazait az adott feltételeknél,
- alkalmazza a rendezett számpárok és a síkbeli pontok közti kapcsolatot,
- kiszámítja a pontok távolságát, kiszámítja a háromszög területét, és felhasználja a képleteket a matematikai problémákban.

4.10 Függvények

Tartalom

A függvény definíciója

A valós függvény definíciója és az egyváltozós valós-valós függvények jellegzetességei (injektív, szürjektív, bijektív, növekvő, csökkenő, páros, páratlan, …)

Összetett függvény (függvény kompozítumok)

Inverz függvény

A sík transzformációi

A függvény határértéke

Speciális határértékek

A függvények folytonossága

⇨ A zárt intervallumon levő folytonos függvények tulajdonságai

⇨ A zérushelyek keresése technológia segítségével

Célok

A jelölt:

- elsajátítja és alkalmazza a függvény fogalmát,
- elsajátítja és alkalmazza a következő fogalmakat: a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete, injektív, szürjektív, bijektív leképezés, illrtve függvény,
- megrajzolja és elemzi a függvény grafikonját párhuzamos eltolás és nyújtás segítségével,
- alkalmazza a párhuzamos eltolást, a tükrözéseket és a nyújtásokat a problémák megoldása során,
- megállapítja az inverz függvény létezését egyszerű példákon, felírja ennek a megadási módját, és megrajzolja az adott függvény inverz függvényének grafikonját,
- ⇨ elemzi a hozzárendelési szabályt, majd megrajzolja az abszolút értékes függvény grafikonját,
- megrajzolja a lépcsőzetesen növekvő/csökkenő függvény grafikonját,
- megmagyarázza a határérték fogalmát az adott pontban megfelelően kiválasztott példák alapján, melyek a függvény grafikonnal bemutatott, táblázattal bemutatott, illetve analitikusan bemutatott prezentációi,
- kiszámítja a függvény határértékét, és megmagyarázza a kapott határérték jelentését,
- megmagyarázza a végtelenben vett határérték jelentését,
- megkülönbözteti a függvény végtelenben vett határértékét a végtelen határértéktől,
- alkalmazza a határértéket a függvény aszimptotájának kiszámításánál,
- felismeri a grafikonjával megadott függvény folytonosságát,

Tartalom	Célok
	– ⇨ megmagyarázza a folytonosságot az adott függvény hozzárendelési szabálya alapján, – megkeresi azokat az intervallumokat, amelyeken az adott függvény folytonos, – ⇨ következtet a konkrét folytonos függvény tulajdonságaira egy zárt intervallumon, – ⇨ megkeresi a görbe zérushelyét vagy egy pontját előre megadott pontossággal a technológia segítségével;

4.10.1 Lineáris függvény

Tartalom	Célok
A lineáris függvény definíciója és tulajdonságai, a lineáris függvény grafikonja Egyenes egyenletei a síkban Az egyenesek által közbezárt szög Lineáris egyenlet Lineáris egyenlőtlenség Lineáris egyenletrendszer ⇨ Gauss-féle algoritmus ⇨ Lineáris egyenlőtlenség-rendszer A mindennapi életből vett egyszerű példák modellezése lineáris függvény segítségével	– felírja a lineáris függvény hozzárendelési szabályát, és megrajzolja a grafikonját, – ismeri és alkalmazza a lineáris függvény együtthatóinak jelentését, – értelmezi és alkalmazza a lineáris függvény grafikonját gyakorlati helyzetekben, – kiszámítja az egyenesek által közbezárt szöget, – ismeri az egyenes különböző egyenleteinek jelentését, – a szövegben felismeri a lineáris viszonyt, és felírja a lineáris egyenletet, – megoldja a lineáris egyenleteket, – ⇨ elemzi az egyszerű lineáris egyenleteket, egyenlőtlenségeket és a lineáris egyenletrendszereket, – kifejezi a problémát egyenletrendszerként, és ezt megoldja, – megold egyszerű, mindennapi problémákat, és ezeket megfelelően értelmezi (interpretálja), – modellezi a mindennapi életből vett egyszerű problémákat a lineáris függvény segítségével;

4.10.2 Hatványfüggvény

Tartalom	Célok
A természetes kitevőjű hatványfüggvény definíciója és jellegzetességei A negatív egész kitevőjű hatványfüggvény definíciója és jellegzetességei A mindennapi életből vett példák modellezése hatványfüggvény segítségével	– felismeri a hatványos függőséget, és ezt megkülönbözteti az egyéb függőségektől (egyenes arányosság …), – ábrázolja és elemzi a hatványfüggvény grafikonját a transzformációk segítségével, – felírja és modellezi a valós jelenségeket a hatványfüggvény segítségével, és ezeket kritikusan kiválasztja;

4.10.3 Gyökfüggvény

Tartalom	Célok
A gyökfüggvény definíciója, jellegzetességei és grafikonja	– a gyökfüggvényt a hatványfüggvény inverzeként fogja fel;

4.10.4 A másodfokú függvény

Tartalom	Célok
A másodfokú függvény definíciója, jellegzetességei és grafikonja A másodfokú függvény megadási módjai ⇨ A másodfokú függvény alkalmazása – szélsőérték-problémák Viѐt-képletek A másodfokú egyenlet A parabola és az egyenes metszéspontja Két parabola metszéspontjai A másodfokú egyenlőtlenség ⇨ A másodfokú egyenlőtlenség-rendszer ⇨ A mindennapi életből vett példák modellezése másodfokú függvény segítségével	– felírja a másodfokú függvényt különböző adatok esetén, és megrajzolja a grafikonját, – értelmezi és alkalmazza a másodfokú függvény grafikonját gyakorlati helyzetekben, – megoldja a másodfokú egyenletet és egyenlőtlenséget, – átalakítja a problémát egyenlet vagy egyenlőtlenség formájába, és ezt megoldja, – olvassa a matematikai szöveget, ezt elemzi és bemutatja, – ⇨ modellezi a mindennapi életből vett egyszerű problémákat a másodfokú függvény segítségével;

4.10.5 Exponenciális függvény

Tartalom	Célok
Az exponenciális függvény definíciója, jellegzetességei és grafikonja Exponenciális egyenletek ⇨ Az exponenciális egyenlőtlenség grafikus megoldása Exponenciális növekedés A valós jelenségek modellezése az exponenciális függvény segítségével	– felismeri az exponenciális függvényt, és ezt megkülönbözteti az egyéb függvényektől, – ismeri és alkalmazza az exponenciális függvény jellegzetességeit, – megrajzolja az exponenciális függvény grafikonját, – alkalmazza az exponenciális függvény grafikonjának párhuzamos eltolását és nyújtását, – összehasonlítja a hatványos és az exponenciális növekedést, – felismeri és megoldja az exponenciális egyenleteket, – felírja és modellezi a mindennapi életből vett példákat az exponenciális függvény segítségével;

4.10.6 Logaritmusfüggvény

Tartalom	Célok
Az logaritmusfüggvény definíciója, jellegzetességei és grafikonja A logaritmus és azonosságai A tízes alapú és a természetes logaritmus ⇨ Áttérés más alapra Logaritmusegyenletek ⇨ A logaritmusskála olvasása ⇨ A mindennapi életből vett példák modellezése logaritmusfüggvény segítségével	– ismeri és alkalmazza a logaritmusfüggvény jellegzetességeit, – ábrázolja a logaritmusfüggvény grafikonját, – alkalmazza az exponenciális és a logaritmusfüggvény közti kapcsolatot, – alkalmazza a logaritmusfüggvény párhuzamos eltolását és nyújtását, – alkalmazza a logaritmus azonosságait, – felismeri az e számot és a természetes logaritmust, – felismeri és megoldja a logaritmusegyenleteket, – összehasonlítja az exponenciális és a logaritmikus növekedést, – ⇨ felírja és modellezi a mindennapi életből vett példákat a logaritmusfüggvény segítségével;

4.10.7 Polinomfüggvény

Tartalom	Célok
A polinomfüggvény definíciója, jellegzetességei és grafikonja Számtani műveletek polinomokkal A polinomok maradékos osztására vonatkozó alaptétel A polinomfüggvény gyökei Az algebra alaptétele és következményei Horner-algoritmus A polinomfüggvény grafikonjának analízise Polinom-egyenletek Polinom-egyenlőtlenségek ⇨ A biszekció módszer ⇨ A valós jelenségek modellezése polinomok segítségével	– a lineáris és a másodfokú függvényt mint a polinomfüggvény speciális eseteit értelmezi, – számol polinomokkal, – alkalmazza a polinomok maradékos osztására vonatkozó alaptételt, – alkalmazza azt a tételt, amely a polinom lineáris polinommal való osztására vonatkozik, – alkalmazza a Horner-algoritmust a polinomfüggvény gyökeinek meghatározására, – problémamegoldásban alkalmazza a polinomok jellegzetességeit, – ábrázolja és értelmezi a polinomfüggvény grafikonját, – ⇨ alkalmazza a biszekció módszerét, – megoldja a polinom egyenleteket és egyenlőtlenségeket;

4.10.8 Racionális törtfüggvény

Tartalom	Célok
Az racionális törtfüggvény definíciója, jellegzetességei és grafikonja Gyökök, pólusok, aszimptoták Racionális egyenletek ⇨ Racionális egyenlőtlenségek	– ismeri és alkalmazza a racionális törtfüggvény jellegzetességeit, – ábrázolja és értelmezi a racionális törtfüggvény grafikonját, – megoldja a racionális egyenleteket, – ⇨ megoldja a racionális egyenlőtlenségeket;

Tartalom **Célok**

4.10.9 Szögfüggvények

Tartalom

A szögfüggvények definíciója és jellegzetességei a derékszögű háromszögben

A szögfüggvények definíciója az egységkörön

A szögfüggvények jellegzetességei és grafikonjai

A szögfüggvény grafikonjainak transzformációi

Addíciós tételek

Problémák

⇨ Szögfüggvényeket tartalmazó kifejezések szorzattá alakítása, a szögfüggvények szorzatának összeggé alakítása

A ciklometrikus függvények értékeinek kiszámítása

⇨ A ciklometrikus függvények grafikonjai és jellegzetességei

Trigonometrikus egyenletek

⇨ Szögfüggvények a technikában és a természettudományban

Célok

– felírja és alkalmazza a derékszögű háromszögben levő szögfüggvényeket,

– levezeti a szögek szögfüggvényértékeit a következő szögek esetében: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°,

– levezeti és alkalmazza egyazon szög szögfüggvényei közötti összefüggéseket,

– alkalmazza a számológépet,

– alkalmazza a tetszőleges szög szögfüggvény-értékeit,

– ismeri és alkalmazza a szögfüggvény jellegzetességeit,

– ismeri és megmagyarázza a fogalmakat különböző reprezentációk segítségével (értéktáblázattal, grafikonnal, egységkörrel, analitikus módon),

– alkalmazza a szögfüggvény grafikonjának transzformációit,

– ábrázolja és értelmezi a szögfüggvény grafikonjait,

– alkalmazza az addíciós tételeket,

– alkalmazza a kétszeres szög szögfüggvényeit,

– alkalmazza a kétszeres szög szögfüggvényeit (⇨ és a félszög szögfüggvényeit) a trigonometrikus egyenleteknél és a nehezebb feladatokban,

– ⇨ alkalmazza a szorzattá alakítást a kifejezéseknél, és ezeket fel tudja használni az egyenleteknél,

– kiszámítja a ciklometrikus függvények értékeit,

– ⇨ a ciklometrikus függvény grafikonját ábrázolja,

– megoldja a trigonometrikus egyenletet,

– értelmezi és elemzi az analitikus megoldásokat az adott probléma szempontjából,

– alkalmazza a szögfüggvényeket problémamegoldás során, ahol ki kell számítani a szöget,

– megold egyszerű, összetett, valódi és eredeti problémákat.

4.11 Kúpszeletek

Tartalom

A másodfokú görbe algebrai felírása

Kör középponti helyzetben és a párhuzamosan eltolt kör

Ellipszis középponti helyzetben és a párhuzamosan eltolt ellipszis

Hiperbola középponti helyzetben

Célok

A jelölt:

– megkeresi a természetben a kúpszeletek példáit,

– összehasonlítja és alkalmazza a kúpszeletek analitikus és mértani definícióját,

– a kört az ellipszis speciális példájaként értelmezi, és ⇨ levezeti az ellipszis egyenletét a kör egyenletéből nyújtással a kiválasztott tengely irányában,

Tartalom

Parabola csúcsponti helyzetben

⇨ Párhuzamosan eltolt hiperbola és parabola

⇨ A kúpszeletek érintői

Célok

- elemzi az egyenletet, és grafikus módon szemlélteti a köröket és az ellipsziseket középponti helyzetben és párhuzamos eltolt helyzetben,
- elemzi az egyenletet, és grafikus módon szemlélteti a hiperbolákat és a parabolákat csúcsponti helyzetben,
- elemzi a parabola egyenletének különböző alakjait,
- ⇨ megszerkeszti a kúpszeleteket,
- ⇨ ábrázolja a kúpszeletet a megfelelő számítógépes program segítségével is,
- ⇨ elemzi a párhuzamosan eltolt hiperbolák és parabolák grafikus szemléltetéseit,
- ⇨ elemzi a párhuzamosan eltolt hiperbola és a parabola egyenleteit,
- ⇨ analitikusan és grafikusan elemzi a kúpszelet érintőit,
- analitikus és grafikus módszerrel meghatározza egy kúpszelet és egy egyenes metszéspontjait, illetve két kúpszelet metszéspontjait középponti helyzetben,
- indokolja az eredmények értelmét a metszéspontok analitikus elemzésénél,
- ⇨ megoldja a matematikai problémákat is.

4.12 Sorozatok és sorok

Tartalom

A sorozat definíciója

A sorozatok tulajdonságai (véges, végtelen, monoton, korlátos, konvergens …)

Számtani sorozat

Mértani sorozat

A számtani sorozat első n tagjának összege és a mértani sorozat első n tagjának összege

A sorozat határértéke

Sorok

A mértani sor konvergenciája

Kamatoskamat-számítás

Évjáradékok

Amortizációs terv

Célok

A jelölt:

- példákat hoz fel, induktív módon következtet, általánosít és folytatja a sorozatot,
- megtalálja és felírja a tagok közti kapcsolatot,
- felírja a sorozat tagjait, ha adott néhány első tag és a sorozat rekurzív képlete,
- megállapítja és elemzi különbözően bemutatott sorozatok tulajdonságait (számmal bemutatott sorozat, grafikus módon, analitikus módon …),
- olvassa és szemlélteti a különbözően megadott, illetve bemutatott sorozatokat,
- alkalmazza a sorozatok tulajdonságait,
- előrejelzi és kiszámítja a sorozat határértékét,
- megkülönbözteti a sorozatot a sortól,
- megkülönbözteti a konvergens és a divergens sor fogalmát,
- kiszámítja a sorozat első n tagjának összegét,
- kiszámítja a mértani sor összegét,
- megkülönbözteti a kamatszámítást a kamatoskamat-számítástól,
- megkülönbözteti a konform és a relatív kamatlábat,

Tartalom	Célok
	– alkalmazza az ekvivalens tőkék elvét, – megkeresi a kamatozás mindennapi példáit, előrejelzi az elvárásokat, majd a szimulációs számítások alapján döntést hoz, – kiszámítja az évjáradékot, és elkészíti az amortizációs tervet.

4.13 Differenciálszámítás

Tartalom	Célok
Differenciálhányados, derivált, a derivált geometriai jelentése Deriválási szabályok, az elemi függvények deriváltjai A derivált alkalmazása Szélsőértékek, a függvény növekedése és csökkenése ⇨ A függvény második deriváltja ⇨ A függvény inflexiós pontja, konvex és konkáv függvény ⇨ A derivált függvények folytonossága Szélsőérték-problémák ⇨ A valós problémák modellezése, és ezek megoldása a differenciálszámítási módszerek segítségével	A jelölt: – leírja a differenciálszámítás fogalmait grafikus, numerikus és analitikus prezentációk alkalmazásával, – kiszámítja a differenciálhányados értékét, – kiszámítja a differenciálhányados határértékét, – megmagyarázza a derivált geometriai jelentését, – ⇨ levezeti a deriválás egyszerű szabályait a derivált definíciója segítségével, – ⇨ levezeti a függvény deriváltját a deriválási szabályok segítségével, – deriválja az elemi függvényeket és az összetett (kompozítum) függvényeket, – ⇨ kiszámítja az implicit módon megadott függvény deriváltját, – a grafikonból megállapítja azokat a pontokat, amelyekben a függvény deriválálható (nem deriválható), – összekapcsolja a függvények tulajdonságait a függvény deriváltjával (előrejelzi a tulajdonságokat, ábrázolja a grafikont …), – felírja az érintő egyenletét és a normálegyenletet a görbe adott pontjában, – kiszámítja két görbe hajlásszögét, – elemzi a deriválható függvényt (megmagyarázza a szélsőértékeket, meghatározza a növekedési és csökkenési intervallumokat), és megrajzolja a grafikont, – ⇨ összeköti a függvény folytonossága és deriválhatósága fogalmakat az adott intervallumon, – megold egyszerű szélsőérték-problémákat, – ⇨ megold a mindennapi életből vett szélsőérték-problémákat, és megfelelően értelmezi a megoldást.

4.14 Integrálszámítás

Tartalom	Célok
	A jelölt:
Határozatlan integrál (primitív függvény)	– megmagyarázza a függvény deriváltja és a határozatlan integrál közti kapcsolatot,
A határozatlan integrál jellegzetességei	– ismeri az elemi integrálok táblázatát és ezek kapcsolatát a deriváltak táblázatával,
⇨ Helyettesítéses módszer	– alkalmazza a határozatlan integrál jellegzetességeit,
⇨ A parciális integrálás	– ⇨ integrál helyettesítéses módszerrel,
⇨ A racionális törtfüggvények integrálása	– ⇨ alkalmazza a parciális integrálás módszerét,
Határozott integrál	– ⇨ integrálja a racionális törtfüggvényeket (résztörtekre való bontással),
A határozott integrál jellegzetességei	– ismeri a határozott integrál geometriai jelentését,
A határozatlan és határozott integrál közti kapcsolat	– alkalmazza a határozott integrál jellegzetességeit,
A határozott integrál alkalmazása (területek, ⇨ forgástestek térfogata …)	– alkalmazza a határozatlan és határozott integrál közti kapcsolatot,
	– megold egyszerű matematikai és valós problémákat.

4.15 Kombinatorika

Tartalom	Célok
	A jelölt:
A szorzatszabály, fadiagram	– kiszámítja az $n!$-t,
Az összegszabály	– megkülönbözteti az egyes kombinatorikai fogalmakat,
Permutációk	– kiszámítja a binomiális együttható értékét,
Ismétléses permutációk	– levezeti a kéttagú kifejezés hatványait.
Variációk	
Ismétléses variációk	
Kombinációk	
Binomiális tétel	
Pascal-háromszög	

4.16 Valószínűségszámítás

Tartalom	Célok
	A jelölt:
A valószínűségszámítás alapfogalmai: kísérlet, esemény, eseménytér (mintatér)	– felírja az eseményeket, és számol velük,
Számítás eseményekkel	– megkeresi egy kísérlet összes eseményét,
Szubjektív valószínűség, tapasztalati valószínűség, a matematikai valószínűség, az esemény valószínűsége	– megkülönbözteti a szubjektív, a tapasztalati és a matematikai valószínűséget,
	– megérti és összekapcsolja a tapasztalati és a matematikai valószínűséget,

Tartalom	Célok
Az ellentett események valószínűségének kiszámítása, az eseményösszeg valószínűségének kiszámítása ⇨ Feltételes valószínűség ⇨ Az események szorzatának valószínűsége, független események ⇨ Független kísérletek sorozata Normális eloszlás	– ismeri és alkalmazza a matematikai valószínűség definícióját, – az egyes események adott valószínűségeiből kiszámítja egyéb események valószínűségeit, – ⇨ megkülönbözteti az egymást kizáró és független események fogalmait, – alkalmazza az eseményteret (mintateret).

4.17 Statisztika

Tartalom	Célok
Statisztikai alapfogalmak Az adatok fajtái Az adatok gyűjtése Az adatok rendezése és strukturálása Az adatok bemutatása (oszlopdiagram, pozíciódiagram, kördiagram, hisztogram, sugárdiagram, vonal- és görbegrafikon, dobozdiagram) Számtani közép, medián, módusz Szórási terjedelem, szórás, interkvartilis terjedelem Statisztika-feladatok	A jelölt: – megkülönbözteti a tanulmányozott jellegzetességet (változót), egységet, a változó értékét, mintát, populációt, – felismeri az egység tanulmányozott jellegzetességét, – megkülönbözteti a leíró vagy minőségi adatokat, a sorozat vagy ordinális, valamint a numerikus vagy mennyiségi adatokat, – összegyűjti az adatokat, ezeket rendezi és strukturálja, – kiválasztja a megfelelő diagramot az adatok bemutatására, – olvassa, elkészíti és interpretálja a statisztikai diagramokat, – kifejleszt egy kritikus viszonyt az eredmények interpretálása során, – ismeri és alkalmazza az adatok különböző összefoglalási módjait, – kiválaszt egy megfelelő módot az adatok összefoglalására az adatok fajtája szempontjából, – kiszámítja, megbecsüli és értelmezi a számtani közepet, a móduszt és a médiánt az adatok középértékeként, – megbecsüli az egyszerű kapcsolatokat a valószínűségi változók közt, – kiszámítja, megbecsüli és értelmezi a szórási terjedelmet, a szórást és az interkvartilis terjedelmet az adatok szóródásának méreteként, – a teljes tapasztalati kutatás eljárásában alkalmazza az adatokkal végzett munkáról tanultakat (kiválasztja a témát, felállítja a kutatási kérdést, összegyűjti az adatokat, azokat rendezi és strukturálja, majd elemzi, bemutatja, és a kapott eredményeket értelmezi).

5 AZ ÍRÁSBELI VIZSGA PÉLDAFELADATAI

5.1 Az 1. feladatlap példafeladatai

Az 1. faladatlap feladatait számológép használata nélkül kell megoldani.

5.1.1 Példa rövid feladra

1. Oldja meg az $\ln x + \ln 1 = \ln e$ egyenletet!

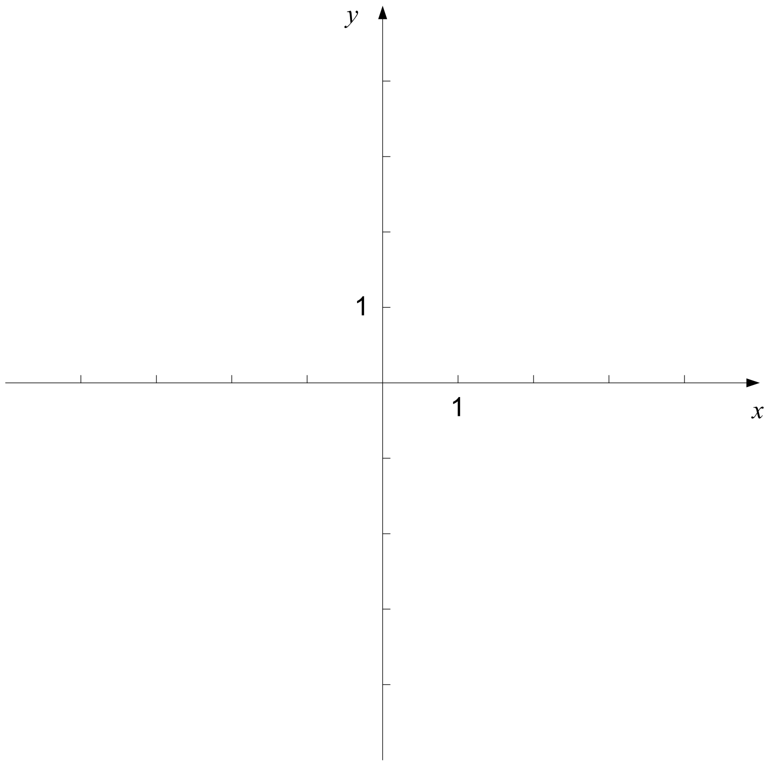
(2 pont)

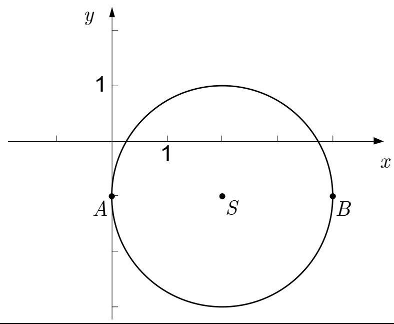
Feladat	Pontok	Megoldás	Kiegészítő utasítások
1	2	◆ az $x = e$ egyenlet felírása	Csak a $\ln 1 = 0$ vagy $\ln e = 1$ összefüggések felhasználása ... 1 pont.
Összesen	**2**		

5.1.2 Példa rövidebb struktúrált feladatra

1. Ábrázolja az $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ egyenletű körvonalat a koordináta-rendszerrel ellátott síkban! Számítással mutassa meg, hogy az $A(0,-1)$ pont illeszkedik a megadott körvonalra! Írja fel a B pont mindkét koordinátáját, ha az AB húr a körvonal átmérője!

(8 pont)



Feladat	Pont	Megoldás	Kiegészítő utasítások
1	5	◆ Kép 	Ha az egyenletet csak $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ alakra hozta ... 3 pont (minden tag 1 pont). Ha a jelölt a körvonalat a hibásan átalalakított egyenlet alapján helyesen rajzolja le, *1 pontot kap.
	2	◆ Az A pont koordinátáinak behelyettesítése az egyenletbe, és az egyenlőség bizonyítása.	*1 + 1
	1	◆ A $B(4,-1)$ pont felírása.	
Összesen	**8**		

5.1.3 Példa strukturált feladatra

1. Adott az $f(x)=2\ln x$ hozzárendelési szabályú $f:\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ függvény.
   1.1. Oldja meg a $2f(x)=f(2x)$ egyenletet!

   (3 pont)

   1.2. Bizonyítsa be, hogy fennáll $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$!

   (3 pont)

   1.3. A teljes indukció módszerével mutassa be, hogy minden n természetes számra fennáll: $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n+1}\right)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

   (4 pont)

Feladat	Pont	Megoldás	Kiegészítő utasítások
1.1	3	◆ $x=2$ megoldás	Csak az átalakított egyenlet, pl. $4\ln x=2\ln(2x)$ ... 1 pont. Csak az antilogaritmus visszakeresése, pl. $x^2=2x$ ... *1 pont Ha a jelölt a nem megfelelő megoldásokat nem zárja ki, ezt a pontot nem kapja meg.
Összesen	3		
1.2	1	◆ Pl. $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=2\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}\right)$ felírás	
	1	◆ Pl. $2\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}\right)=2\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)$ átalakítás	
	1	◆ $2\ln\frac{1}{3}=f\left(\frac{1}{3}\right)$ megállapítás	
Összesen	3		
1.3	1	◆ Bebizonyítja az állítás igazságát $n=1$-re, pl. $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{1+1}\right)$	
	*1	◆ Az $n+1$ tag összegének felírása vagy felhasználása, pl. $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+\dots$ $\dots+f\left(\frac{n}{n+1}\right)+f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$	
	1	◆ Felhasználta az indukciós feltevést, pl. $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+\dots$ $\dots+f\left(\frac{n}{n+1}\right)+f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=$ $=f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$	
	1	◆ Végeredmény kiszámítása és a végkövetkeztetés, pl. $f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=2\ln\frac{1}{n+1}+2\ln\frac{n+1}{n+2}=$ $=2\ln\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)=f\left(\frac{1}{n+2}\right)$	
Összesen	4		

5.2 A 2. feladatlap példafeladatai

A 2. faladatlap feladatainak megoldása során számológép is használható.

5.2.1 Példa rövid feladatra

1. A ΔABC derékszögű háromszög AB átfogója 6,33 cm hosszúságú. A $\sphericalangle CAB$ szög mérete $\alpha = 33°33'$. Számítsa ki az AC oldal hosszúságát! Az eredményt kerekítse századcentiméterre!

(2 pont)

Feladat	Pont	Megoldás	Kiegészítő utasítások
1	2	◆ az $\lvert AC\rvert \doteq 5{,}28$ cm megoldás felírása	Csak a $\cos\alpha = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert}$ összefüggés felírása vagy felhasználása ... 1 pont.
Összesen	2		

5.2.2 Példa rövidebb strukturált feladatra

1. Adott két üres, egyenes henger alakú tartály, amelyek az alaplapjaikon állnak.

   1.1 Az első tartály egyenes henger alakú, és 3 dm a sugara. 120 liter almalét öntünk bele, és így a kétharmadáig töltjük meg. Számítsa ki a tartály magasságát! Az eredményt kerekítse tizeddeciméterre!

   (3)

   1.2 A másik tartály egyenlő oldalú henger alakú (a tengelymetszete négyzet). 120 liter almalét öntünk bele, és így teljesen megtöltjük. Számítsa ki a tartály sugarát! Az eredményt kerekítse tizeddeciméterre!

   (3)

(6 pont)

Feladat	Pont	Megoldás	Kiegészítő utasítások
1.1	3	◆ a tartály magasság közelítő értékének kiszámítása, pl. $v \doteq 6{,}4$ dm	Csak a képlet felírása vagy felhasználása, pl. $V = \pi r^2 \cdot h$ ... 1 pont. Csak a 120 $\ell = \frac{2}{3}V$ vagy $h = \frac{2}{3}v$ felírása vagy felhasználása ... 1 pont.
1.2	3	◆ az egyenlő oldalú henger sugár közelítő értékének kiszámítása, pl. $r \doteq 2{,}7$ dm	Csak annak felírása vagy felhasználása, hogy az egyenlő oldalú henger átmérője egyenlő a magasságával ... 1 pont. Csak az egyenlet felírása, pl. $120 = 2\pi r^3$ ... 1 pont.
Összesen	6		Ha a jelölt az eredményeknél nem írja fel az egységeket 1 pontot elveszít.

5.2.3 Példa strukturált feladatra

1. A tanteremben 40 szék van, amelyeket úgy rendeztek öt sorba, hogy minden sorban egyenlő számú szék van. A székekre nyolc diák ül le tetszőlegesen: Maja, Éva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka és France.

   1.1 Számítsa ki a következő események valószínűségét:
   A – az első sor üresen marad,
   B – az első sorban pontosan három szék foglalt,
   C – minden diák ugyanabba a sorba ül le.

   (7 pont)

   Maja, Éva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka és France délutánonként társasjátékoznak. Mindegyikük pontosan egyszer dobta fel a szabályos játékkockát.

   1.2. Számítsa ki a következő események valószínűségét:
   D – senki sem dob hatost,
   E – pontosan ketten dobnak hatost.

   (3 pont)

Feladat	Pont	Megoldás	Kiegészítő utasítások
1.1	1	◆ az összes eset számának kiszámítása, pl. $n=\binom{40}{8}$	
	2	◆ a valószínűség kiszámítása, pl. $P(A)=\frac{10518300}{76904685}$	Csak a kedvező esetek száma $m_A=\binom{32}{8}$ ... 1 pont. Elfogadjuk a helyesen kerekített eredményt is, pl. $P(A)\doteq 0{,}13677$.
	2	◆ a valószínűség kiszámítása, pl. $P(B)=\frac{11277056}{76904685}$	Csak $m_B=\binom{8}{3}\binom{32}{5}=11277056$ ... 1 pont. Elfogadjuk a helyesen kerekített eredményt is, pl. $P(B)\doteq 0{,}146637$.
	2	◆ a valószínűség kiszámítása, pl. $P(C)=\frac{5}{76904685}$	Csak az $m_C=5$ ... megállapítás 1 pont. Elfogadjuk a helyesen kerekített eredményt is, pl. $P(C)\doteq 0{,}0000000650=6{,}50\cdot 10^{-8}$.
Összesen	**7**		A variációkkal végzett számítások egyenrangúan pontozódnak.
1.2	1	◆ $P(D)=\left(\frac{5}{6}\right)^8\doteq 0{,}233$	
	2	◆ $P(E)=\binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6=$ $=28\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6\doteq 0{,}260$	Csak a $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6$ felírás ... 1 pont.
Összesen	**3**		

6 SZÓBELI VIZSGA

A jelölt a szóbeli vizsgát az iskolai vizsgabizottság előtt teszi le, a vizsga szabályos lebonyolításáról a bizottság gondoskodik, valamit a jelölt eredményeit pontozza, és gondoskodik a pontok helyes kiszámításáról.

A jelölt válaszol a szóbeli vizsgalapján szereplő kérdésekre. Az említett vizsgalap három kérdésből áll, melyeket a Matematika Általános Érettségi Országos Tantárgyi Bizottsága készít elő.

A vizsgáztató a jelöltnek pótkérdéseket is feltehet, melyekkel elmélyíti a vizsgalap kérdéseit, de nem lépi túl az adott kérdés kereteit.

A jelölt a szóbeli vizsgán 15 perces felkészülési időt kap, továbbá egy alkalommal új vizsgalapot kérhet. A szóbeli vizsga legfeljebb 20 percig tart.

► Alapszintű vizsgalap példája

1. Definiálja a prímszám és az összetett szám fogalmát! Soroljon fel három prímszámot és három összetett számot!

   (2 pont)

   Írja le az $n(n>1)$ természetes szám prímtényezős felbontásának folyamatát!
   Egyértelmű-e a prímtényezős felbontás? Magyarázza el!
   Hány prímszám van?

   (3 pont)

   Hogyan állapítjuk meg egy természetes számról, hogy prímszám-e?

   (1 pont)

2. Adja meg az ellipszis geometriai definícióját, és magyarázza el!

   (2 pont)

   Írja fel annak az ellipszisnek az általános egyenletét, melyben a tengelyek a koordinátatengelyekre illeszkednek! Írja fel annak az ellipszisnek az általános egyenletét, melynek a középpontja nem az origó, de amelynek a tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!

   (2 pont)

   Írja fel egy olyan ellipszis képletét, melyben a tengelyek a koordinátatengelyekre illeszkednek, az ellipszist ábrázolja is!

   (2 pont)

3. Definiálja az f függvény deriváltját egy adott pontban, és magyarázza el!

   (2 pont)

   Mi a geometriai jelentése az f függvény egy adott pontban vett deriváltjának?

   (1 pont)

   Sorolja fel azokat a szabályokat, amelyek megadják két függvény összegének, szorzatának és a függvény számszorosának deriváltját! Minden szabályra adjon példát is!

   (3 pont)

► Emelt szintű vizsgalap példája

1. Definiálja a prímszám és az összetett szám fogalmát! Soroljon fel három prímszámot és három összetett számot!

   (2 pont)

   Írja le az $n(n>1)$ természetes szám prímtényezős felbontásának folyamatát! Egyértelmű-e a prímtényezős felbontás? Magyarázza el!

   (2 pont)

   Bizonyítsa be, hogy végtelen sok prímszám van!

   (2 pont)

2. Adja meg az ellipszis geometriai definícióját, és magyarázza el!

   (2 pont)

   Írja fel annak az ellipszisnek az általános egyenletét, melyben a tengelyek a koordinátatengelyekre illeszkednek! Írja fel annak az ellipszisnek az általános egyenletét, melynek a középpontja nem az origó, de amelynek a tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!

   (2 pont)

   Írja fel egy olyan ellipszis képletét, melyben a tengelyek a koordinátatengelyekre illeszkednek, az ellipszist ábrázolja is!

   (2 pont)

3. Definiálja az f függvény deriváltját egy adott pontban, és magyarázza el!

   (2 pont)

   Mi a geometriai jelentése az f függvény egy adott pontban vett deriváltjának?

   (1 pont)

   Válasszon egy példát $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nemlineáris deriválható függvényre, és a definició szerint vezesse le a deriválját!

   (2 pont)

   Mondja el azt a szabályt, amely megadja két függvény hányadosának deriváltját!

   (1 pont)

A Matematika Általános Érettségi Országos Tantárgyi Bizottsága a szóbel vizsga kérdéseit megváltoztathatja, kihagyhatja vagy kiegészítheti őket.

A szóbeli kérdések listáját minden évben január végéig közzéteszik az Országos Vizsgaközpont honlapján (https://www.ric.si/splosna_matura/predmeti/matematika/).

7 A SAJÁTOS NEVELÉSI IGÉNYŰ JELÖLTEK

Az érettségi vizsgáról szóló törvény és az annak alapján elfogadott szabályzatok értelmében minden jelölt egyenlő feltételek alatt tesz érettségi vizsgát. A sajátos nevelési igényű jelöltek részére, akiket megfelelő végzéssel irányítottak az adott képzési programba, indokolt esetben pedig más (sérült vagy beteg) jelöltek számára is − hiányosságuk, korlátaik, zavaruk mértékének megfelelően − módosítani kell az érettségi vizsga lebonyolításának, valamint tudásuk értékelésének módját.[5]

A következő módosítások lehetségesek:

1. az érettségi vizsgát két részben, két egymást követő vizsgaidőszakban teljesíthetik;
2. meghosszabbíthatják számukra az érettségi vizsga idejét (beleértve a szüneteket is, illetve több rövidebb szünetet iktathatnak be) és szükség esetén meg is szakíthatják a vizsgát;
3. módosíthatják számukra a vizsgaanyag formáját (pl. Braille-írás; nagyítás; a vizsgaanyag szövegének lemezre írása, a vizsgaanyag lemezre vétele stb.);
4. külön helyiséget biztosíthatnak számukra;
5. megfelelően módosítják a munka körülményeit (erősebb világítás, az asztal megemelésének lehetősége stb.);
6. speciális segédeszközöket biztosítanak számukra (számítógép, Braille-írógép, megfelelő írószerek, fóliák domború rajz készítéséhez, hasonlók);
7. a vizsgán más személy is segítségükre lehet (pl. az írásban vagy olvasásban segítő, jelnyelvi tolmács, vakok és gyengén látók segítője);
8. számítógépet használhatnak az olvasáshoz és/vagy íráshoz;
9. módosíthatják számukra a szóbeli vizsgát és a hallás utáni értést mérő vizsgarészt (felmentés, szájról olvasás, jelnyelvre való fordítás);
10. módosíthatják az értékelést (pl. a jelölt betegségéből eredő hibákat nem tekintjük hibának; az értékeléskor a külső értékelők együttműködnek a sajátos nevelési igényű jelöltekkel történő kommunikáció szakembereivel).

[5] A szöveg az általános érettségi vizsga minden tantárgyára vonatkozik, és értelemszerűen kell alkalmazni az egyes vizsgák esetében.

8 IRODALOMJEGYZÉK

Az általános érettségi vizsgára való felkészülésben a jelöltek a Szlovén Köztársaság Közoktatási Szaktanácsa által jóváhagyott tankönyveket és taneszközöket használják. A jóváhagyott tankönyvek és taneszközök jegyzéke a Középiskolai tankönyvkatalógusban található meg, amely a Szlovén Köztársaság Oktatási Intézete honlapján (www.zrss.si) olvasható.

9 MELLÉKLET

9.1 Matematikai jelek

Ebben a fejezetben található néhány matematikai jel, amelyeket a matematika érettségi vizsgánál kell alkamazni. A lista nem tartalmazza az összes matematikai jelölést. Az alábbi listában szereplő jelölésekről a feladatlapokon nem feltétlenül lesz külön magyarázat. A vizsgán alkalmazott jelölésekről, amelyek nem szerepelnek ezen a listán, a feladatlapon külön lesz definíció és magyarázat.

► **Logika**

$\wedge$, &	konjunkció
$\vee$	diszjunkció
$\Rightarrow$	implikáció
$\Leftrightarrow$	ekvivalencia
$\neg A$, $\overline{A}$	az A kijelentés negáltja (tagadása)
$\forall$	mindegyik
$\exists$	létezik

► **Halmazok**

$\in$	eleme
$\notin$	nem eleme
$\{x_1, x_2, ...\}$	az x_1, x_2 ... elemek halmaza
$\{x; ...\}$, $\{x \mid ...\}$	minden olyan x -ek halmaza, amelyre …
$m(A)$, $\|A\|$	az A halmaz elemeinek száma (a halmaz számossága)
$\mathcal{P}A$, $\mathcal{P}(A)$	az A halmaz hatványhalmaza
$\varnothing$, $\{\ \}$	üres halmaz
$\mathcal{U}$	alaphalmaz
A^C, A'	az A halmaz komplementuma
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$	a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^-$	a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$	a racionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$	a pozitív racionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^-$	a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$	a pozitív valós számok halmaza
$\mathbb{R}_0^+$	a nemnegatív valós számok halmaza

$\mathbb{R}^-$	a negatív valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\subset$, $\subseteq$	részhalmaz
$\not\subset$	nem részhalmaz
$\cup$	egyesítés, unió
$\cap$	metszet
$\times$	Descartes-szorzat (direkt szorzat)
$\setminus$, $-$	a halmazok különbsége
$[a,\ b]$	zárt intervallum $\{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$
$[a,\ b)$	intervallum $\{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$
$(a,\ b]$	intervallum $\{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}$
$(a,\ b)$	nyílt intervallum $\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

► **Relációk és műveletek**

$(a,\ b)$	rendezett pár
$=$	egyenlő
$\neq$	nem egyenlő
$\doteq$, $\approx$	közelítőleg egyenlő
$<$	kisebb
$\le$	kisebb vagy egyenlő
$>$	nagyobb
$\ge$	nagyobb vagy egyenlő
$+$	plusz
$-$	minusz
$\cdot$, $\times$	-szor, -szer, -ször
$:$, $\div$	osztás
$a \mid b$	a osztója b -nek
$D(a,\ b)$	az a és a b szám legnagyobb közös osztója
$v(a,\ b)$	az a és a b szám legkisebb közös többszöröse
$\sum$	összegzés (szumma) jele
$\lvert a \rvert$	az a szám abszolút értéke

► **Komplex számok**

i	képzetes egység
Re z	a z komplex szám valós része
Im z	a z komplex szám képzetes része
$\lvert z \rvert$	a z komplex szám abszolút értéke
$\overline{z}$, z^*	a z komplex szám konjugáltja

► **Geometria. Vektorok**

$d(A, B)$	az A és B pont távolsága
$\lvert AB \rvert$	az AB szakasz hossza
$\sphericalangle$	szög
$\triangle$	háromszög
$\parallel$	párhuzamos
$\perp$	merőleges
$\cong$	egybevágó
$\sim$	hasonló
$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$	az $\overrightarrow{AB}$ vektor, az $\vec{a}$ vektor
$s\vec{a}$	a $\vec{a}$ vektor szorzása az s számmal
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzata
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	a standard ortonormált bázis vektorai
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$	az a_1, a_2, a_3 koordinátájú (komponensű) $\vec{a}$ vektor
$\lvert \vec{a} \rvert$	az $\vec{a}$ vektor hossza
$\vec{r}_A$	az A pont helyvektora
$A(x, y)$	az x és y koordinátájú A pont a síkban
$A(x, y, z)$	az x, y és z koordinátájú A pont a térben
S, p	síkidom területe
V	mértani test térfogata
P	mértani test felszíne

► **Függvények**

$f : A \to B$	az A halmazt a B halmazba leképező f leképezés (függvény)
$x \mapsto f(x)$	az x elemhez $f(x)$-t rendeljük
D_f	az f függvény értelmezési tartománya
Z_f	az f függvény értékkészlete
f^{-1}	az f függvény inverze
$f \circ g$	az f és a g függvények összetett (kompozítum) függvénye
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	az f függvény határértéke, amikor x tart a – hoz
(a_n), $\{a_n\}$	a_n általános tagú sorozat
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$	az a_n általános tagú sorozat határértéke
f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	az f függvény (első) deriváltja

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f$	az f függvény határozatlan integrálja
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	az f függvény a -tól b -ig vett határozott integrálja

► **Kombinatorika. Valószínűségszámítás. Statisztika**

P_n	n elem ismétlés nélküli permutációnak száma
$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k}$	n elem ismétléses permutációinak száma
$n!$	n faktoriális
V_n^r	n elem r -ed osztályú ismétlés nélküli variációinak száma
${}^{(p)}V_n^r$	n elem r -ed osztályú ismétléses variációinak száma
$\binom{n}{r}$	binomiális együttható $(n$ alatt az $r)$
C_n^r	n elem r -ed osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma
G	biztos esemény
N	lehetetlen esemény
$E_1, E_2, E_3, \ldots$	elemi események
A', $\overline{A}$	az A esemény ellentett eseménye
$A \cup B$, $A + B$	az A és a B események összege
$A \cap B$, $A \cdot B$	az A és a B események szorzata
$A \setminus B$, $A - B$	az A és a B események különbsége
$A \subset B$	az A esemény maga után vonja a B esemény bekövetkezését
$P(A)$	az A esemény valószínűsége
$P(A / B)$	az A esemény B -re vonatkoztatott feltételes valószínűsége (feltételes valószínűség)
$\overline{x}$, μ	középérték
σ^2	diszperzió vagy szórásnégyzet
σ	szórás

9.2 Képeletek és tételek

Ebben a fejezetben találhatók azok a képletek és tételek, amelyek a feladatlapok mellékletei. A jelöltektől elvárás, hogy ezeket a tételeket ismerjék, értsék, és tudják őket alkalmazni. Az emelt szintű mellékelt képletek és tételek lapja tartalmazza az alapszintű képleteket és tételeket, és még néhány további képletet is a magasabb szintű tudásanyagból, amelyeket elemi szinten nem ellenőriznek.

9.2.1 A feladatlaphoz mellékelt képletek, alapszint

(Köbök összege és különbsége) Tetszőleges $a,\ b \in \mathbb{R}$ esetén fennáll $\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}$.

(Euklidesz-tétel (befogótétel) és a magasságtétel) A derékszögű háromszög befogói a és b, az átfogója c. Az átfogóhoz tartozó magasság v_c, az a befogó merőleges vetülete az átfogóra a_1, a b befogó merőleges vetülete az átfogóra b_1. Ekkor fennáll: $\boxed{a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1}$, $\boxed{v_c^2 = a_1 b_1}$.

(A háromszög beírt és körülírt körének sugara) A háromszög oldalai a, b és c, a félkerület $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, a területe S, az adott háromszög beírt körének sugara r és az adott háromszög körülírt körének sugara R. Ekkor fennáll: $\boxed{r = \dfrac{S}{s}}$ és $\boxed{R = \dfrac{abc}{4S}}$.

(Héron-képlet) A háromszög oldalai a, b és c, a félkerület $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Ekkor a területe $\boxed{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

(A háromszög területe) Legyenek az $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ és $C(x_3,\ y_3)$ síkbeli pontok. Az A, B és C csúcsú háromszög területe: $\boxed{S = \dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|}$.

(**Gömb**) Az r sugarú gömb felszíne és térfogata $\boxed{P = 4\pi r^2,\ V = \dfrac{4\pi r^3}{3}}$.

(Addíciós tételek) Tetszőleges $x,\ y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll $\boxed{\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y}$, $\boxed{\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y}$

Tetszőleges $x,\ y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, amelyre $x + y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $\tan x \tan y \neq -1$, fennáll $\boxed{\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}}$.

(A félszögek szögfüggvényei)

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll $\boxed{\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}}$, $\boxed{\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}}$.

Tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + \pi \cdot 2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ esetén fennáll $\boxed{\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}}$.

(Ellipszis) A síkbeli ellipszis féltengelyei a és b $(a > b)$, a lineáris excentricitása e, a numerikus excentricitása ε. Ekkor fennáll: $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \dfrac{e}{a}}$.

(Hiperbola) A síkbeli hiperbola valós féltengelye a, képzetes féltengelye b, a lineáris excentricitása e, a numerikus excentricitása ε. Ekkor fennáll: $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \dfrac{e}{a}}$.

(Parabola) Az $y^2 = 2px$ egyenletű síkbeli parabola $\boxed{G\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)}$ fókuszponttal, az adott parabola vezéregyenesének egyenlete $\boxed{x = -\dfrac{p}{2}}$.

(Számtani sorozat) Az (a_n) számtani sorozat első n elemének összege $\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(Mértani sorozat) A $q \in \mathbb{R}$ hányadosú (a_n) mértani sorozat első n elemének összege $\boxed{S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$, ha $q \neq 1$, és $\boxed{S_n = na_1}$, ha a $q = 1$.

(Határértékek) $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e}$ és $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$.

9.2.2 A feladatlaphoz mellékelt képletek, emelt szint

(A természetes kitevőjű hatványok összege és különbsége) Tetszőleges $a,\ b \in \mathbb{R}$ és tetszőleges n természetes számra fennáll

$\boxed{a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)}$,

$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}$.

(Euklidesz-tétel (befogótétel) és a magasságtétel) A derékszögű háromszög befogói a és b, az átfogója c. Az átfogóhoz tartozó magasság v_c, az a befogó merőleges vetülete az átfogóra a_1, a b befogó merőleges vetülete az átfogóra b_1. Ekkor fennáll: $\boxed{a^2=ca_1,\ b^2=cb_1}$, $\boxed{v_c^2=a_1b_1}$.

(A háromszög beírt és körülírt körének sugara) A háromszög oldalai a, b és c, a félkerület $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, a területe S, az adott háromszög bert körének sugara r és az adott háromszög körülírt körének sugara R. Ekkor fennáll: $\boxed{r=\dfrac{S}{s}}$ és $\boxed{R=\dfrac{abc}{4S}}$.

(Héron-képlet) A háromszög oldalai a, b és c, a félkerület $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Ekkor a területe

$\boxed{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

(A háromszög területe) Legyenek az $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ és $C(x_3,\ y_3)$ síkbeli pontok. Az A, B és C csúcsú háromszög területe: $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|}$.

(**Gömb**) Az r sugarú gömb felszíne és térfogata $\boxed{P=4\pi r^2,\ V=\dfrac{4\pi r^3}{3}}$.

(**Pont és egyenes távolsága**) Legyenek $a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ és a és b ne legyenek egyenlők 0-val. A $T_0(x_0,\ y_0)$ pont távolsága az $ax+by-c=0$ egyenletű p egyenestől

$\boxed{d(T_0,\ p)=\dfrac{|\,ax_0+by_0-c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

(**Logaritmus)** Legyenek $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$. Akkor minden $x>0$ -re fennáll $\boxed{\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$.

(Addíciós tételek) Tetszőleges $x,\ y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll

$\boxed{\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}$, $\boxed{\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y}$.

Tetszőleges $x,\ y \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, amelyre $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ tetszőleges $k\in\mathbb{Z}$ és $\tan x\tan y\neq -1$, fennáll $\boxed{\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}}$.

(A félszögek szögfüggvényei) Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén fennáll

$\boxed{\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}}$, $\boxed{\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}}$.

Tetszőleges $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+\pi\cdot 2k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ esetén fennáll $\boxed{\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}$.

(Összegek szorzattá alakítása) Tetszőleges $x,\ y\in\mathbb{R}$ esetén fennáll

$\boxed{\sin x\pm\sin y=2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cos\dfrac{x\mp y}{2}}$,

$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}$,

$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}}$.

(A szorzatok összeggé alakítása) Tetszőleges $x,\ y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll

$$\boxed{\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)},$$

$$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)},$$

$$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)}.$$

(Ellipszis) A síkbeli ellipszis féltengelyei a és b $(a > b)$, a lineáris excentricitása e, a numerikus excentricitása ε. Ekkor fennáll: $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(Hiperbola) A síkbeli hiperbola valós féltengelye a , képzetes féltengelye b, a lineáris excentricitása e, a numerikus excentricitása ε. Ekkor fennáll: $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(Parabola) Az $y^2 = 2px$ egyenletű síkbeli parabola $\boxed{G\left(\frac{p}{2},\ 0\right)}$ fókuszponttal, az adott parabola vezéregyenesének egyenlete $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

(Számtani sorozat) Az (a_n) számtani sorozat első n elemének összege $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(Mértani sorozat) A $q \in \mathbb{R}$ hányadosú (a_n) mértani sorozat első n elemének összege

$\boxed{S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}}$, ha $q \neq 1$, és $\boxed{S_n = na_1}$, ha a $q = 1$.

(Határértékek) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ és $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.

(Határozatlan integrál) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekkor minden $C \in \mathbb{R}$ esetén fennáll

$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$ és $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C}$.

(Parciális integrálás) Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Ekkor fennáll:

$\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}$.

(Forgástest térfogata) Legyen $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Annak a testnek a térfogata, amelyet úgy kapunk, hogy az f függvény grafikonja, az abszcissza tengely és az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt síkidomot az abszcissza tengely körül 360° -kal megforgatunk, egyenlő lesz $\boxed{V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x}$.

(Bernoulli-képlet) Legyen p valószínűségű, hogy egy adott kísérletben bekövetkezik az A esemény. Annak valószínűsége, hogy az A esemény a kísérlet n egymást követő megismétlésénél pontosan k- szor következik be $\boxed{P(n,\ p,\ k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$.