



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 0 5 1 4 0 1 1 1 1

PRIMA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

Prova d'esame 1

Livello base

Lunedì 6 giugno 2005 / 120 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 12 esercizi, vanno risolti tutti nello spazio sotto il testo dell'esercizio. **I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate. Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

Gli esercizi risolti a matita e le risoluzioni non chiare e illeggibili verranno valutati con zero (0) punti. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 80 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 16 pagine, di cui 2 vuote.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

01. Scrivete l'equazione della retta p che passa attraverso il punto $A(1, 0)$ ed è parallela alla retta $2x + y = 4$. Determinate l'intersezione della retta p con l'asse delle ordinate.

(7 punti)

02. Nel triangolo rettangolo ABC (l'angolo retto è nel vertice C) i lati $a = 3$ cm e $c = 6$ cm .
Calcolate con esattezza la lunghezza del lato b e le ampiezze degli angoli α e β . Fate lo schizzo.

(6 punti)

03. È data la progressione aritmetica 1, 7, 13 ... Calcolate quale numero è il millesimo membro della progressione e qual è la somma dei primi mille termini della progressione.

(6 punti)

04. Dimostrate che l'uguaglianza $\frac{\sin x (\cos 2x + 1)}{\cos x \sin 2x} = 1$ è vera per ogni $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(5 punti)

05. Un raccoglitore di funghi ha nel cesto gallinacci, porcini e amanite. I tre quarti di tutti i funghi sono gallinacci, il venti per cento sono porcini, le amanite sono due. Quanti funghi ha il raccoglitore di funghi nel cesto?

(5 punti)

06. Risolvete l'equazione quadratica $x^2 - ax + a = 0$ per $a = -2$. Semplificate le soluzioni. Scrivete le soluzioni esatte. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 - ax + a = 0$ ha un'unica soluzione?

(8 punti)

07. Quale numero complesso z soddisfa l'equazione $(1 - i)z = 3 + 4i$? Scrivete $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$ e calcolate $|z|$. Fate l'estrazione parziale del valore di $|z|$.

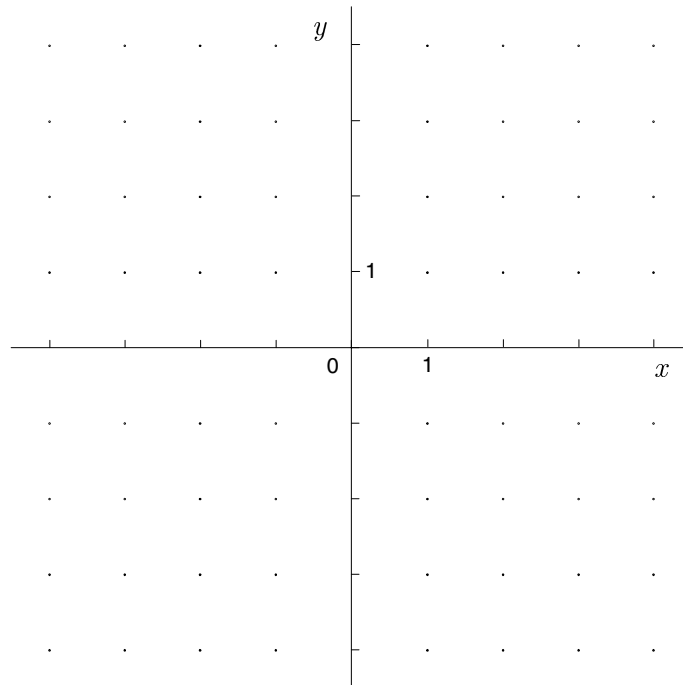
(7 punti)

08. Nel sistema coordinato ortogonale sono dati i punti $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$ e $C(3, -2)$. Scrivete i vettori \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} con le componenti, calcolate il loro prodotto scalare e l'ampiezza dell'angolo che essi racchiudono.

(8 punti)

09. Scrivete l'equazione dell'ellisse che ha il centro nell'origine del sistema coordinato, uno dei vertici è $T(0, 1)$ ed un suo fuoco è $F(\sqrt{3}, 0)$. Tracciate l'ellisse nel sistema coordinato dato.

(7 punti)



10. Semplificate l'espressione $\log_2 a + \log_2 4a - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 2a^2$ per $a > 0$.

(7 punti)

11. In un gruppo ci sono 10 ragazze e 10 ragazzi. Di questi 3 ragazze e 8 ragazzi hanno la patente di guida. Scegliamo a caso 1 ragazzo ed 1 ragazza. Calcolate la probabilità, che almeno uno dei due abbia la patente di guida.

(6 punti)

12. Calcolate l'intersezione delle curve $y = \frac{2x^2 - 8}{x + 3}$ e $y = 2x - 1$ e l'angolo tra di loro.

(8 punti)

PAGINA VUOTA

PAGINA VUOTA