Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 0 5 1 4 0 2 1 2

SPOMLADANSKI ROK

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Višja raven

Ponedeljek, 6. junij 2005 / 90 minut

Dovoljeno dodatno gradivo in pripomočki:
kandidat prinese s seboj nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, žepni računalnik brez grafičnega zaslona in brez možnosti simboličnega računanja, šestilo in 2 trikotnika, lahko tudi ravnilo.
Kandidat dobi dva ocenjevalna obrazca in dva konceptna lista.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila. Ne izpuščajte ničesar!

Ne obračajte strani in ne začenjajte reševati nalog, dokler Vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalna obrazca).

V tej izpitni poli so 3 strukturirane naloge. Rešujte vse naloge. Naloge rešujte pod besedilom naloge in na naslednji strani. Strani 10, 11 in 12 so rezervne. Uporabite jih le, če Vam zmanjka prostora. Nedvoumno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. **Drugih konceptnih listov ocenjevalci ne bodo pregledovali.**

Pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom. **Če se zmotite, napisano prečrtajte.** Grafe funkcij rišite s svinčnikom. Pazite, da bo Vaš izdelek pregleden in čitljiv. Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vmesnimi računi in sklepi.

Na strani 2 je standardna zbirka zahtevnejših formul, ki jih ni treba znati na pamet. Morda si boste s katero med njimi pomagali.

Naloge, pisane z navadnim svinčnikom, nejasne in nečitljive rešitve se ovrednotijo z nič (0) točkami. Če ste nalogo reševali na več načinov, nedvoumno označite, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje.

Vsako nalogo skrbno preberite. Rešujte premišljeno. Zaupajte vase in v svoje sposobnosti.

Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40.

Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 12 strani, od tega 3 rezervne.

Formule

- $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-....+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$
- Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2=ca_1$, $b^2=cb_1$, $v_c^2=a_1b_1$
- Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{s}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$
- Kotne funkcije polovičnih kotov:
  $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$
- Kotne funkcije trojnih kotov:
  $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- Adicijski izrek:
  $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
  $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
  $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$
- Faktorizacija:
  $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$
- Razčlenitev produkta kotnih funkcij:
  $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$;
  $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$;
  $\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$
- Razdalja točke $T_0\left(x_0, y_0\right)$ od premice $ax+by-c=0$:
  $d\left(T_0,p\right)=\left|\frac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$
- Ploščina trikotnika z oglišči $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$, $C\left(x_3,y_3\right)$:
  $S=\frac{1}{2}\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|$
- Elipsa: $e^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$; $a>b$
- Hiperbola: $e^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$, a je realna polos.
- Parabola: $y^2=2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2},0\right)$
- Integrala:
  $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

01. Imamo funkciji $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ in $g(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$.

a) V dani koordinatni sistem skicirajte grafa funkcij f in g. Izračunajte kot med grafom funkcije g in ordinatno osjo. Rezultat zaokrožite na kotne minute.

(6 točk)

b) Izračunajte točni koordinati presečišča grafov funkcij f in g.

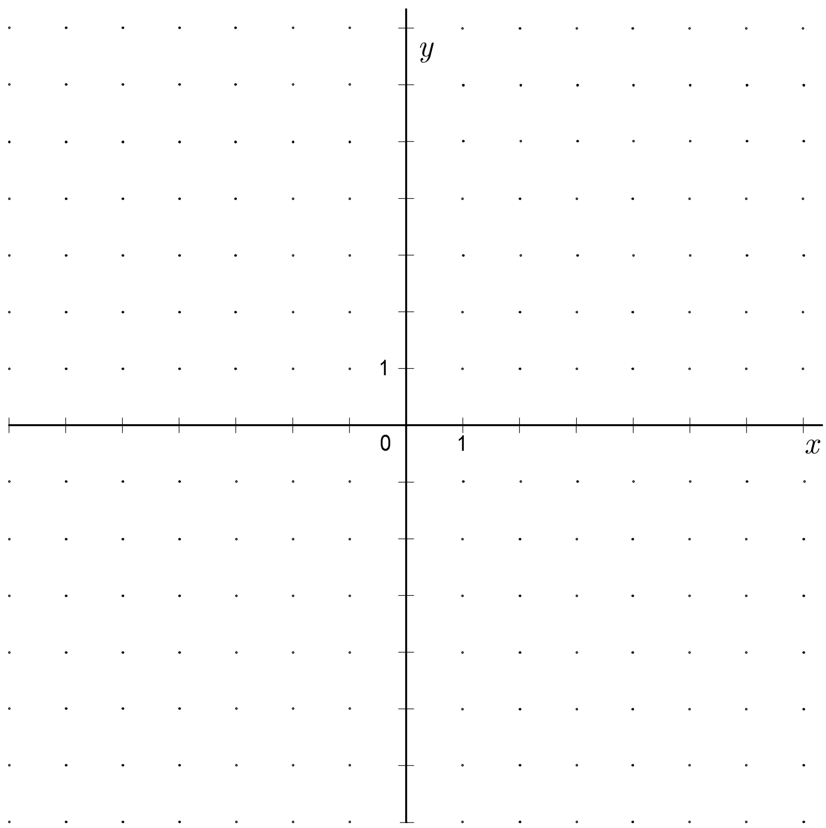
(3 točke)

c) Naj bo L lik, ki ga v prvem kvadrantu omejujejo grafa funkcij f in g ter ordinatna os. Pokažite, da je ploščina lika L enaka $3 - 2\sqrt{2}$.

(3 točke)

d) Poiščite inverzno funkcijo g^{-1} funkcije g.
Pokažite, da je $\left(g^{-1} \circ f\right)(x) = g^{-1}\left(f(x)\right) = \ln 2 - x$.

(3 točke)



02. V pravokotnem koordinatnem sistemu v prostoru imamo točke $A(3,\ t,\ -5)$, $B(2t,\ 4,\ -1)$ in $C(6,\ 8,\ 7)$. Krajevne vektorje teh točk označimo $\vec{a}=\vec{r}_A$, $\vec{b}=\vec{r}_B$ in $\vec{c}=\vec{r}_C$.

a) Za kateri vrednosti realnega števila t je dolžina vektorja $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$ enaka 11?

(4 točke)

b) Izračunajte realno število t tako, da bo trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri oglišču C.

(4 točke)

c) Naj bo $t=2$. Pokažite, da ležijo v tem primeru vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.

(4 točke)

03. V krogu s središčem S in polmerom $2\ \mathrm{cm}$ je tetiva MN dolga $2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$.

a) Izračunajte središčni kot $\varphi = \sphericalangle MSN$.

(2 točki)

b) Izračunajte ploščino trapeza, ki ima za osnovnici tetivo MN in premer kroga. Zapišite točen rezultat.

(2 točki)

c) Koliko odstotkov ploščine kroga predstavlja ploščina manjšega od krožnih odsekov, ki ju določa tetiva MN?

(4 točke)

d) Točka P naj bo tretje oglišče trikotnika MNP, včrtanega danemu krogu, pri čemer je kot $\sphericalangle MPN$ ostri kot, dolžini stranic MP in NP pa sta v razmerju $2:1$. Izračunajte velikost kota $\sphericalangle MPN$ in dolžini stranic MP in NP.

(5 točk)

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN