



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SECONDA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

Livello superiore

Lunedì, 28 agosto 2006 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, nonché del compasso, di due squadretti e di un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo della prova, due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo di ciascuno di essi e nella pagina che lo segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse.

I valutatori non terranno in considerazione le risoluzioni contenute nei fogli per la minuta.

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato, tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna di esse potrà esservi utile.

Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame non vanno scritte a matita. Se avete risolto l'esercizio proponendo più versioni, indicate in modo inequivocabile quella che il valutatore deve correggere.

Leggete bene ogni esercizio e risolvete la prova con attenzione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio massimo conseguibile è di 40 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

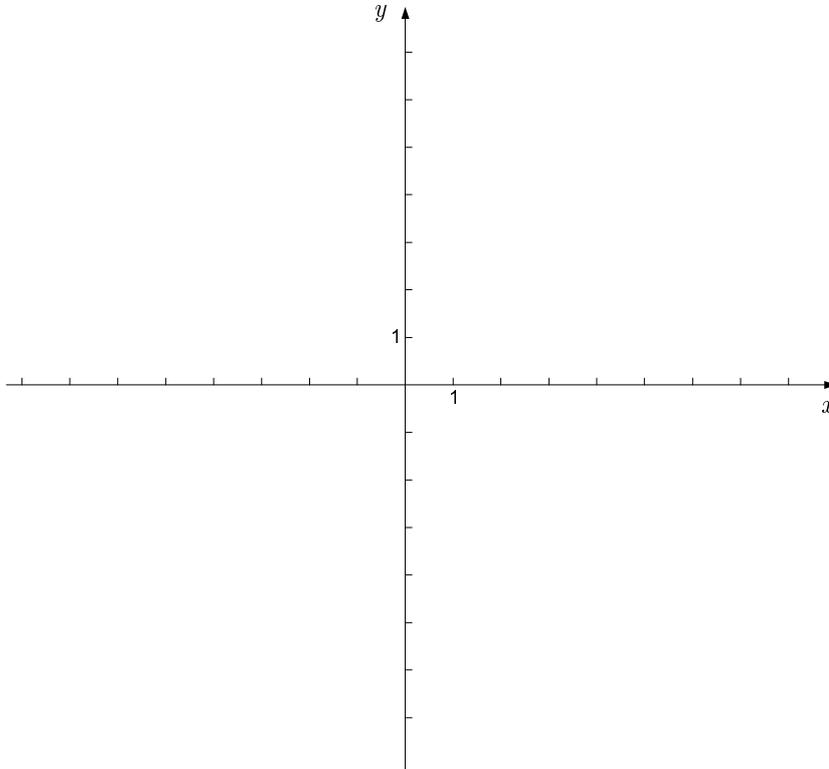
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

VOLTATE PAGINA

01. Sono date le funzioni $f(x) = x^3 - 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 2x$.

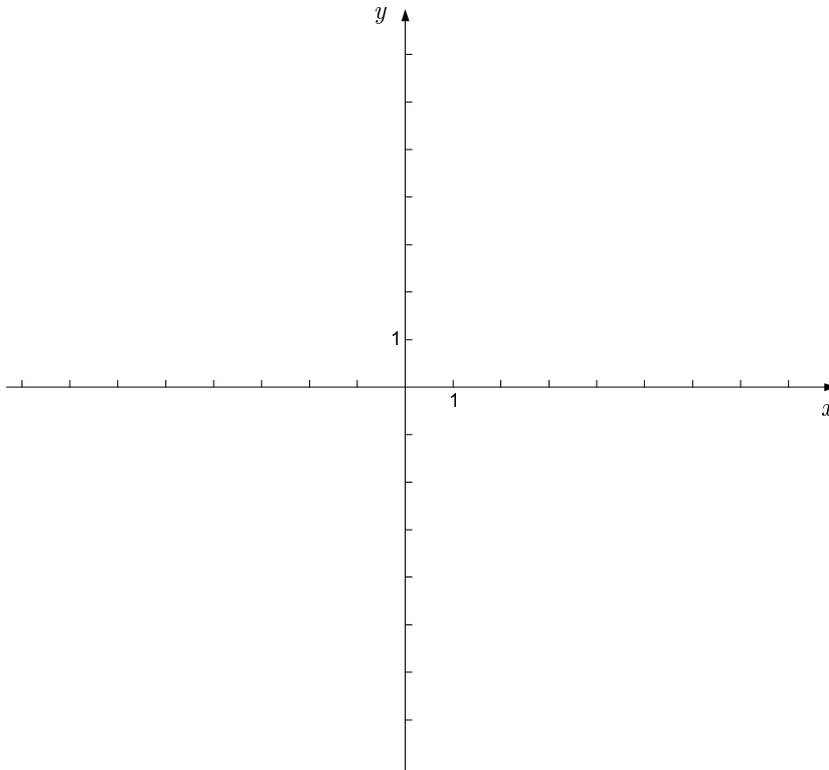
- a) Calcolate gli zeri della funzione f e i punti nei quali la funzione f ha gli estremi relativi.
Tracciate il grafico della funzione f .

(6 punti)



- b) Tracciate il grafico della funzione razionale $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (non è necessario calcolare i punti stazionari).

(4 punti)



- c) Calcolate gli zeri della funzione $u(x) = g(|x+1|) - 3$.

(5 punti)

02. Sia $\frac{x+1}{x} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^3 + \dots$ ($x \neq 0, x \neq -1$) una serie geometrica infinita.

a) Calcolate con esattezza la somma della serie per $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4 punti)

b) Per quale valore di x la somma della serie è uguale a 1?

(3 punti)

c) Calcolate per quali valori di x la serie è convergente.

(5 punti)

03. In tutti i rettangoli che incontrerete in questo esercizio siano $|AB| = a$ e $|BC| = b$.

a) Il perimetro di un rettangolo misura 880 cm. Calcolate i lati a e b in modo che l'area del rettangolo sia massima.

(4 punti)

b) Ruotiamo di 360° il rettangolo ($a = 8$ cm, $b = 3$ cm) attorno all'asse esterno al rettangolo, parallelo al lato BC e distante da esso di $d = 2$ cm. Calcolate il volume e l'area della superficie del solido di rotazione ottenuto. Il risultato sia esatto.

(5 punti)

c) Il punto M giace sul lato BC in modo che risulti $|BM| : |MC| = 1 : 3$. Indichiamo con P il punto d'intersezione del segmento DM con la diagonale AC . In quale rapporto il punto P divide la diagonale AC ?

Scrivete il rapporto $|AP| : |PC|$.

(4 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA