Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M07240212

JESENSKI ROK

Višja raven
MATEMATIKA
Izpitna pola 2

Torek, 28. avgust 2007 / 90 minut

Dovoljeno dodatno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese s seboj nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo brez grafičnega zaslona in brez možnosti računanja s simboli, šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo.
Kandidat dobi dva ocenjevalna obrazca in dva konceptna lista.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila. Ne izpuščajte ničesar!

Ne obračajte strani in ne začenjajte reševati nalog, dokler Vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalna obrazca).

V tej izpitni poli so 3 strukturirane naloge. Rešujte vse naloge. Naloge rešujte pod besedilom naloge in na naslednji strani. Strani 10, 11 in 12 so rezervne. Uporabite jih le, če Vam zmanjka prostora. Nedvoumno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. **Drugih konceptnih listov ocenjevalci ne bodo pregledovali.**

Pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom. **Če se zmotite, napisano prečrtajte.** Grafe funkcij rišite s svinčnikom. Pazite, da bo Vaš izdelek pregleden in čitljiv. Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vmesnimi računi in sklepi.

Na strani 2 je standardna zbirka zahtevnejših formul, ki jih ni treba znati na pamet. Morda si boste s katero med njimi pomagali.

Rešitev nalog v izpitni poli ni dovoljeno zapisovati z navadnim svinčnikom. Če ste nalogo reševali na več načinov, nedvoumno označite, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje.

Vsako nalogo skrbno preberite. Rešujte premišljeno. Zaupajte vase in v svoje sposobnosti.

Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40.

Želimo Vam veliko uspeha.

Ta pola ima 12 strani, od tega 3 rezervne.

Formule

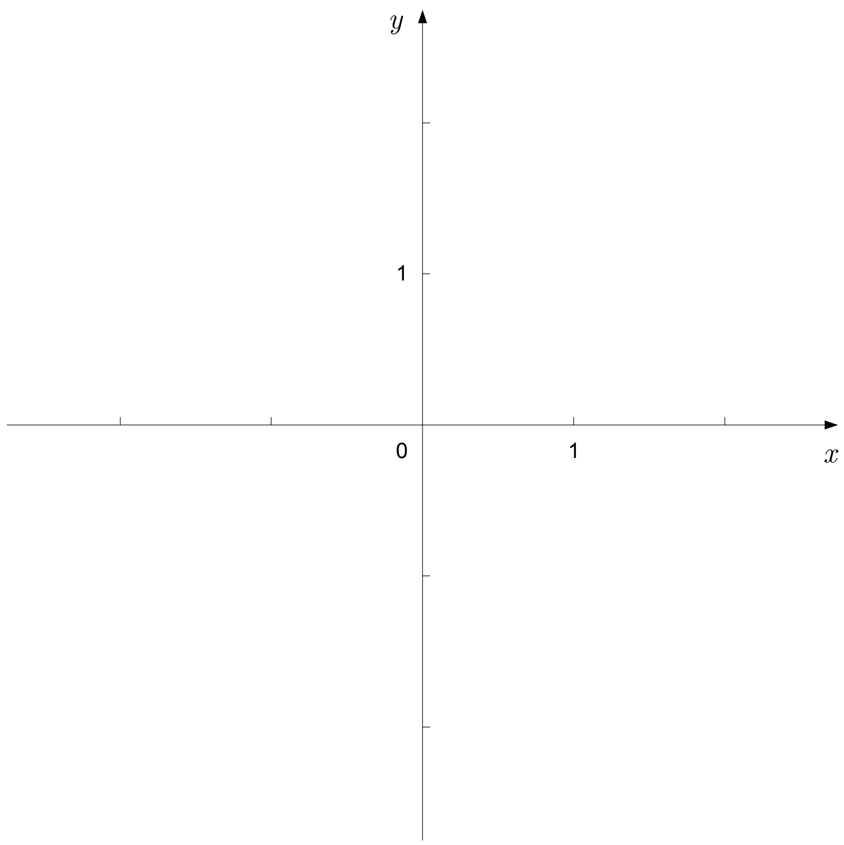
- $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots.+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$
- Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2=ca_1$, $b^2=cb_1$, $v_c^2=a_1b_1$
- Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{s}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$
- Kotne funkcije polovičnih kotov:
  $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$
- Kotne funkcije trojnih kotov:
  $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- Adicijski izrek:
  $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
  $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
  $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$
- Faktorizacija:
  $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\tan x\pm\tan y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\cot x\pm\cot y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$
- Razčlenitev produkta kotnih funkcij:
  $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$
  $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
  $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
- Razdalja točke $T_0\left(x_0, y_0\right)$ od premice $ax+by-c=0$:
  $d\left(T_0, p\right)=\left|\frac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$
- Ploščina trikotnika z oglišči $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$, $C\left(x_3,y_3\right)$:
  $S=\frac{1}{2}\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|$
- Elipsa: $e^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$; $a>b$
- Hiperbola: $e^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$, a je realna polos
- Parabola: $y^2=2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrala:
  $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\tan\frac{x}{a}+C$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}+C$

OBRNITE STRAN

01. Dani sta funkciji $f(x)=\frac{a}{16}x-\frac{a}{32}x^2$ in $g(x)=\frac{x^4}{a}-\frac{4x^2}{a}$, $a\in\mathbb{R}^+$.

a) Naj bo $a=4$. Izračunajte ekstreme in ničle funkcij f in g ter narišite njuna grafa v isti koordinatni sistem.

(7 točk)



b) Dokažite, da se grafa funkcij f in g v točki $P(2,0)$ sekata pod pravim kotom za vsak $a\in\mathbb{R}^+$.

(3 točke)

c) Dokažite, da je ploščina lika, ki ga oklepata grafa funkcij na intervalu $(0,2)$, enaka $\frac{a}{24}+\frac{64}{15a}$.

(3 točke)

d) Pri katerem a je ploščina lika med grafoma funkcij f in g minimalna?

(3 točke)

02. Naj bo $a_1, 1, a_3, \frac{1}{4}$ ... geometrijsko zaporedje s samimi pozitivnimi členi.

a) Izračunajte člena a_1 in a_3 ter zapišite splošni člen tega zaporedja.

(3 točke)

b) Izračunajte, med katerima zaporednima členoma zaporedja je število 10^{-9}. Napišite odgovor.

(4 točke)

c) Dokažite, da je vsota $\sum_{k=1}^{50} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 \ldots + a_{100}$ enaka $\frac{4}{3}\left(1 - 2^{-100}\right)$.

(3 točke)

d) Izračunajte vsoto vrste $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^3 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \ldots$.

(3 točke)

03. Košarkarsko moštvo sestavlja 12 igralcev: 5 branilcev, 4 krilni igralci in 3 centri. Enemu izmed branilcev je ime Sašo in enemu izmed centrov Primož. Preostali igralci imajo drugačna imena.

a) Na koliko načinov se lahko vsi igralci postavijo v vrsto, če mora Sašo stati v vrsti prvi in če morajo centri stati skupaj (drugih omejitev ni)?

(3 točke)

b) Na koliko načinov lahko trener sestavi prvo peterko, če morajo biti v njej 2 branilca, 2 krilna igralca in 1 center?

(2 točki)

c) Na treningu bo trener razvrstil igralce naključno v tri skupine s po 4 igralci: prva skupina bo vadila proste mete, druga skupina igro v obrambi, tretja skupina igro v napadu.
Izračunajte verjetnost dogodkov:
A – Sašo in Primož bosta vadila igro v obrambi,
B – Sašo bo vadil proste mete, Primož pa igro v napadu.

(6 točk)

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN