Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

JESENSKI ROK
ŐSZI IDŐSZAK

M 0 7 2 4 0 2 1 2 M

Višja raven
Emelt szint

MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Torek, 28. avgust 2007 / 90 minut
2007. augusztus 28., kedd / 90 perc

Dovoljeno dodatno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese s seboj nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo brez grafičnega zaslona in brez možnosti računanja s simboli, šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo.
Kandidat dobi dva ocenjevalna obrazca in dva konceptna lista.

Engedélyezett segédeszközök: a jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, csak műveleteket végző zsebszámológépet, körzőt és 2 háromszögvonalzót vagy vonalzót hoz magával.
A jelöt két értékelőlapot és két vázlatlapot is kap.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 16 strani, od tega 3 rezervne in 2 prazni.
A feladatlap terjedelme 16 oldal, ebből 3 tartalék és 2 üres.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila. Ne izpuščajte ničesar!

Ne obračajte strani in ne začenjajte reševati nalog, dokler Vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalna obrazca).

V tej izpitni poli so 3 strukturirane naloge. Rešujte vse naloge. Naloge rešujte pod besedilom naloge in na naslednji strani. Strani 12, 13 in 14 so rezervne. Uporabite jih le, če Vam zmanjka prostora. Nedvoumno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. **Drugih konceptnih listov ocenjevalci ne bodo pregledovali.**

Pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom. **Če se zmotite, napisano prečrtajte.** Grafe funkcij rišite s svinčnikom. Pazite, da bo Vaš izdelek pregleden in čitljiv. Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vmesnimi računi in sklepi.

Na strani 3 in 4 je standardna zbirka zahtevnejših formul, ki jih ni treba znati na pamet. Morda si boste s katero med njimi pomagali.

Rešitev v izpitni poli ni dovoljeno zapisovati z navadnim svinčnikom. Če ste nalogo reševali na več načinov, nedvoumno označite, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje.

Vsako nalogo skrbno preberite. Rešujte premišljeno. Zaupajte vase in v svoje sposobnosti.

Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40.

Želimo Vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót. Semmit se hagyjon ki.

Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg ezt a felügyelő tanár nem engedélyezi.

Ragassza vagy írja be kódszámát (a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelőlapokra).

Ez a feladatlap 3 strukturált feladatot tartalmaz. Mindegyiket oldja meg. A megoldást a szöveg alá és a következő oldalra írja. A 12., 13. és a 14. oldal tartalék. Csak abban az esetben írjon oda, ha másutt már nincs hely. Egyértelműen jelölje meg, melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon.
Az értékelők a vázlatlapokat nem nézik át.

Töltőtollal vagy golyóstollal írjon. ***A rossz válaszait húzza át.*** *A függvénygrafikonokat ceruzával rajzolja be. Ügyeljen arra, hogy munkája áttekinthető és olvasható legyen. A feladat megoldásának világosan és korrekten kell mutatnia az eredményhez vezető utat, a köztes számításokkal és következtetésekkel együtt.*

A 3. és 4. oldalon található azon képletek standard gyűjteménye, amelyeket nem kell fejből tudnia, de egy részük talán segítségére lehet a feladatok megoldásában.

A feladatlapra nem szabad ceruzával írni a megoldásokat. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék.

Figyelmesen olvassa el mindegyik feladatot, majd megfontoltan oldja meg őket. Bízzon önmagában és képességeiben.

Összesen 40 pont érhető el.

Eredményes munkát kívánunk!

Formule

- $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-....+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$
- Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2=ca_1$, $b^2=cb_1$, $v_c^2=a_1b_1$
- Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{s}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$
- Kotne funkcije polovičnih kotov:
  $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$
- Kotne funkcije trojnih kotov:
  $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- Adicijski izrek:
  $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
  $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
  $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$
- Faktorizacija:
  $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\tan x\pm\tan y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\cot x\pm\cot y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$
- Razčlenitev produkta kotnih funkcij:
  $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$
  $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$
  $\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$
- Razdalja točke $T_0\left(x_0,y_0\right)$ od premice $ax+by-c=0$:
  $d\left(T_0,p\right)=\left|\frac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$
- Ploščina trikotnika z oglišči $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$, $C\left(x_3,y_3\right)$:
  $S=\frac{1}{2}\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|$
- Elipsa: $e^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$; $a>b$
- Hiperbola: $e^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$, a je realna polos
- Parabola: $y^2=2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2},0\right)$
- Integrala: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

Képletek

- $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-....+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$
- *A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele:* $a^2=ca_1$, $b^2=cb_1$, $v_c^2=a_1b_1$
- *A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara:* $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{s}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$
- *A félszögek szögfüggvényei:*
  $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$
- *A szög háromszorosának szögfüggvényei:*
  $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- *Addíciós tételek:*
  $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

  $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

  $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$
- *Tényezőkre bontás:*
  $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

  $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

  $\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$
- *A szögfüggvények szorzatának felbontása:*
  $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$

  $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$

  $\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$
- *A* $T_0\left(x_0,y_0\right)$ *pont távolsága az* $ax+by-c=0$ *egyenestől:*
  $$d\left(T_0,p\right)=\left|\frac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$
- *Az* $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$, $C\left(x_3,y_3\right)$ *csúcsú háromszög területe:*
  $$S=\frac{1}{2}\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|$$
- *Ellipszis:* $e^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$; $a>b$
- *Hiperbola:* $e^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$, *az a valós féltengely*
- *Parabola:* $y^2=2px$, *fókuszpont* $G\left(\frac{p}{2},0\right)$
- *Integrálok:* $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}+C$

OBRNITE STRAN
LAPOZZON!

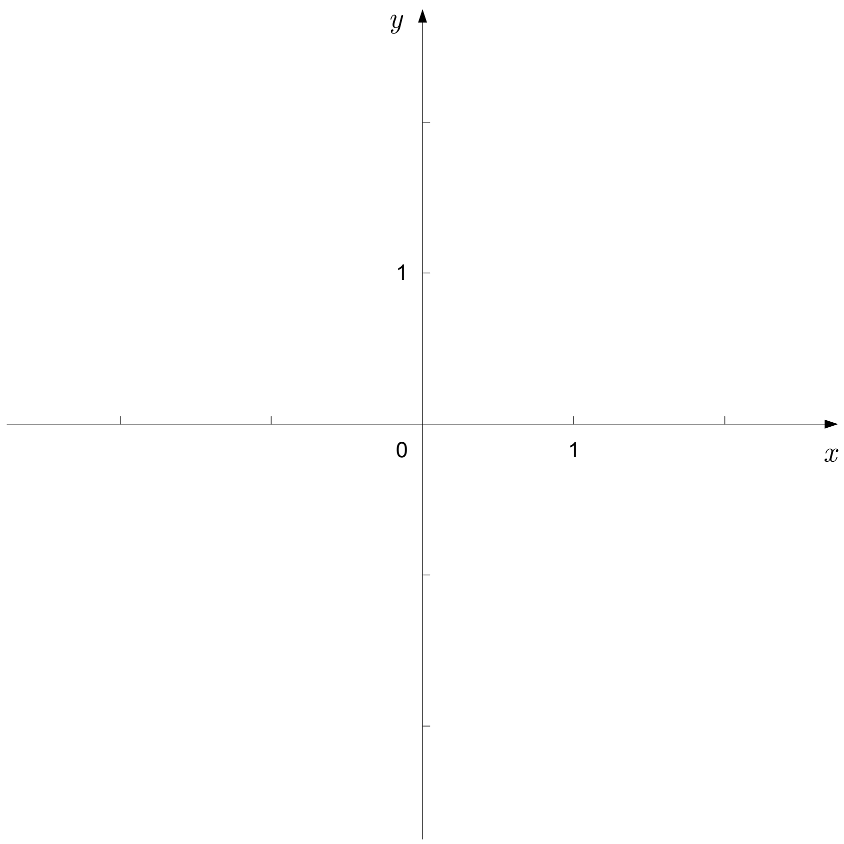
01. Dani sta funkciji $f(x)=\frac{a}{16}x-\frac{a}{32}x^2$ in $g(x)=\frac{x^4}{a}-\frac{4x^2}{a}$, $a\in\mathbb{R}^+$.

Adottak az $f(x)=\frac{a}{16}x-\frac{a}{32}x^2$ *és a* $g(x)=\frac{x^4}{a}-\frac{4x^2}{a}$ *függvények,* $a\in\mathbb{R}^+$.

a) Naj bo $a=4$. Izračunajte ekstreme in ničle funkcij f in g ter narišite njuna grafa v isti koordinatni sistem.

Legyen $a=4$. *Számítsa ki az* f *és a* g *függvények extrémumait és gyökeit, és rajzolja meg mindkét függvény grafikonját a közös koordináta-rendszerben.*

(7 točk/pont)



b) Dokažite, da se grafa funkcij f in g v točki $P(2,0)$ sekata pod pravim kotom za vsak $a\in\mathbb{R}^+$.

Bizonyítsa, hogy az f *és a* g *függvények grafikonjai a* $P(2,0)$ *pontban derékszögben metszik egymást minden* $a\in\mathbb{R}^+$ *esetén.*

(3 točke/pont)

c) Dokažite, da je ploščina lika, ki ga oklepata grafa funkcij na intervalu $(0,2)$, enaka $\frac{a}{24}+\frac{64}{15a}$.

Bizonyítsa, hogy annak a síkidomnak a területe, amelyet a $(0,2)$ *intervallumon a függvények grafikonjai körülhatárolnak, egyenlő* $\frac{a}{24}+\frac{64}{15a}$*-val.*

(3 točke/pont)

d) Pri katerem a je ploščina lika med grafoma funkcij f in g minimalna?

Melyik a *értéknél minimális az* f *és a* g *függvénygrafikonok közti síkidom területe?*

(3 točke/pont)

02. Naj bo $a_1, 1, a_3, \frac{1}{4}$ … geometrijsko zaporedje s samimi pozitivnimi členi.

Legyen az $a_1, 1, a_3, \frac{1}{4}$ … *egy olyan mértani sorozat, amelynek tagjai mind pozitívak.*

a) Izračunajte člena a_1 in a_3 ter zapišite splošni člen tega zaporedja.

Számítsa ki az a_1 *és az* a_3 *tagokat, és írja fel e sorozat általános tagját.*

(3 točke/pont)

b) Izračunajte, med katerima zaporednima členoma zaporedja je število 10^{-9}. Napišite odgovor.

Számítsa ki, melyik két egymás utáni sorozattag között van a 10^{-9} *szám. Írja fel a válaszát.*

(4 točke/pont)

c) Dokažite, da je vsota $\sum_{k=1}^{50} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 \ldots + a_{100}$ enaka $\frac{4}{3}\left(1 - 2^{-100}\right)$.

Bizonyítsa, hogy az $\sum_{k=1}^{50} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 \ldots + a_{100}$ *összeg egyenlő* $\frac{4}{3}\left(1 - 2^{-100}\right)$*-zal.*

(3 točke/pont)

d) Izračunajte vsoto vrste $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^3 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \ldots$.

Számítsa ki az $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^3 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \ldots$ *sorozat összegét.*

(3 točke/pont)

03. Košarkarsko moštvo sestavlja 12 igralcev: 5 branilcev, 4 krilni igralci in 3 centri. Enemu izmed branilcev je ime Sašo in enemu izmed centrov Primož. Preostali igralci imajo drugačna imena.

Egy kosárlabdacsapat 12 játékosból áll: 5 hátvédből, 4 szélső játékosból és 3 középjátékosból. Az egyik hátvéd neve Sašo, és az egyik középjátékosé Primož. A többi játékosnak más neve van.

a) Na koliko načinov se lahko vsi igralci postavijo v vrsto, če mora Sašo stati v vrsti prvi in če morajo centri stati skupaj (drugih omejitev ni)?

Hányféle módon állhatnak egy sorba a játékosok, ha Sašonak elsőnek kell lennie a sorban, és ha a középjátékosoknak együtt kell állniuk (más korlátozás nincs)?

(3 točke/pont)

b) Na koliko načinov lahko trener sestavi prvo peterko, če morajo biti v njej 2 branilca, 2 krilna igralca in 1 center?

Hányféle módon állíthatja fel az edző az első ötöst, ha ebbe 2 hátvédnek, 2 szélső játékosnak és 1 középjátékosnak kell lenni?

(2 točki/pont)

c) Na treningu bo trener razvrstil igralce naključno v tri skupine s po 4 igralci: prva skupina bo vadila proste mete, druga skupina igro v obrambi, tretja skupina igro v napadu. Izračunajte verjetnost dogodkov:
A – Sašo in Primož bosta vadila igro v obrambi,
B – Sašo bo vadil proste mete, Primož pa igro v napadu.

Az edzés közben az edző a játékosokat találomra három 4 fős csoportba sorolja: az első csoport a szabaddobást gyakorolja, a második csoport a védekezést, a harmadik csoport pedig a támodást.
Számítsa ki az alábbi események valószínűségét:
A - Sašo és Primož a védekezést fogják gyakorolni,
B - Sašo a szabaddobást fogja gyakorolni, Primož pedig a támadást.

(6 točk/pont)

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

PRAZNA STRAN
ÜRES OLDAL

PRAZNA STRAN
ÜRES OLDAL