Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 0 9 1 4 0 2 1 2 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore

MATEMATICA

Prova d'esame 2

Sabato, 6 giugno 2009 / 90 minuti

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.
Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 3 quesiti strutturati, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine sucessive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Le pagine 10, 11 e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 12 pagine, di cui 1 bianca e 3 di riserva.

© RIC 2009

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - .... + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:
  $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
  $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- Teoremi di addizione:
  $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$
  $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$
  $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$
  $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$
  $\tan x \pm \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\cot x \pm \cot y = \frac{\operatorname{sen}(y\pm x)}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
  $\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$
  $\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
  $\operatorname{sen} x\cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:
  $d\left(T_0, p\right) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:
  $A = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:
  $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$

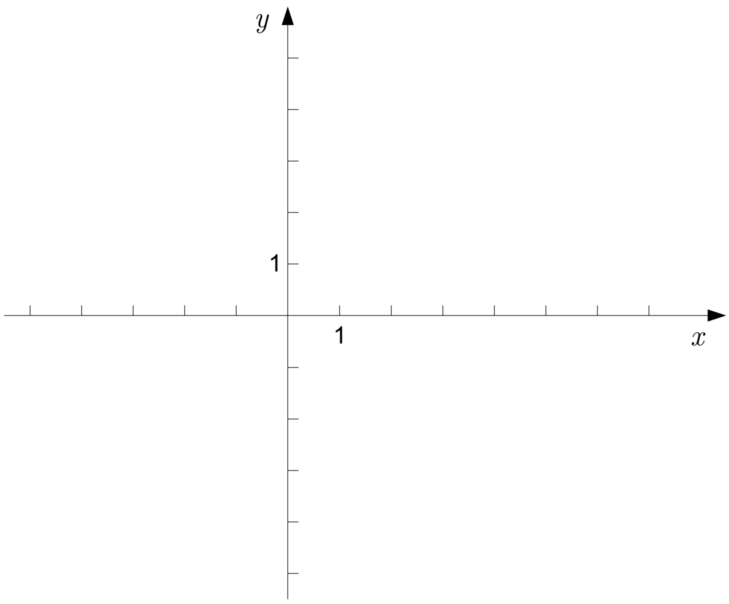
Pagina bianca

VOLTATE IL FOGLIO.

01. È data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Tracciate il grafico della funzione $g(x) = 2f(x) - 3$. Scrivete il campo di definizione e l'insieme immagine della funzione g e calcolate inoltre il suo zero.

(4 punti)



b) Nel punto $T(4, y_1)$ poniamo la normale alla curva $y = 2\sqrt{x} - 3$. Scrivete l'equazione della normale.

(4 punti)

c) Sia $h(x) = f(x) + a$, dove $a \in \mathbb{R}^+$. Determinate a in modo che l'area della figura delimitata dal grafico della funzione h e dall'asse x , nell'intervallo $[0, 4]$, sia uguale a $\frac{20}{3}$.

(4 punti)

d) Sia $u(x) = f(x + b)$, dove $b \in \mathbb{R}^+$. Determinate b in modo che l'area della figura delimitata dal grafico della funzione u , dall'asse x e dall'asse y sia uguale a $\frac{54}{3}$.

(4 punti)

02. È data la serie geometrica $3-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{72}+\ldots,\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$.

a) Per quali numeri reali x la serie è convergente?

(2 punti)

b) Calcolate il numero $x\in\mathbb{R}$ tale per cui la somma della serie sia uguale a $2x-4$.

(3 punti)

c) Sia $x=-1$. Quale percentuale occupa la somma dei primi cinque termini della serie rispetto alla somma di tutti i termini? Il risultato sia espresso con 5 cifre significative.

(3 punti)

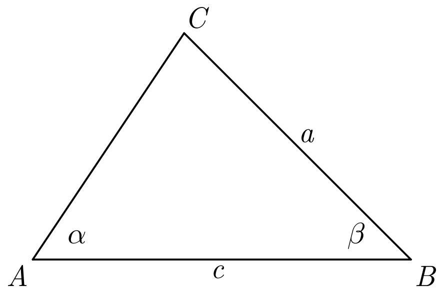
d) Sia $x=-1$. Quali termini della serie sono minori di 10^{-8}? Scrivete la risposta.

(4 punti)

03. Risolvete i seguenti esercizi di trigonometria.

a) Dimostrate che per il triangolo $\triangle ABC$ della figura vale che $c = \dfrac{a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha}$.

(3 punti)

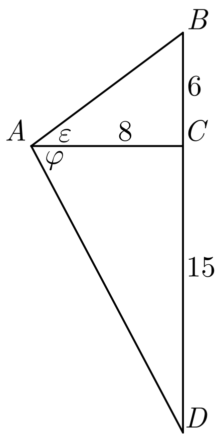


b) Calcolate la lunghezza del lato c del triangolo di dati $a = 40$, $b = 30$ e $\beta = 40^\circ$ (calcolate ambedue le possibili soluzioni).

(5 punti)

c) Calcolate con esattezza il valore di $\cos(\varepsilon + \varphi)$ se ε e φ sono gli angoli indicati nella figura sottostante, le lunghezze dei segmenti sono $|AC| = 8$, $|BC| = 6$ e $|CD| = 15$ e i segmenti AC e BD sono perpendicolari.

(4 punti)



PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA