Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 1 0 1 4 0 2 1 2 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
Prova d'esame 2

Sabato, 5 giugno 2010 / 90 minuti

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.
Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 3 quesiti strutturati, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine sucessive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Le pagine 10, 11 e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 12 pagine, di cui 1 bianca e 3 di riserva.

Formule

- $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ ....\ +a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2=ca_1$, $b^2=cb_1$, $h_c^2=a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R=\frac{abc}{4A}$, $r=\frac{A}{p}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:
  $\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\tan\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
  $\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- Teoremi di addizione:
  $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$

  $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

  $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
  $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

  $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

  $\tan x\pm\tan y=\frac{\operatorname{sen}(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, $\cot x\pm\cot y=\frac{\operatorname{sen}(y\pm x)}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
  $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$

  $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$

  $\operatorname{sen}x\cos y=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)\right]$
- Distanza del punto $T_0\left(x_0,y_0\right)$ dalla retta $ax+by-c=0$:
  $d\left(T_0,p\right)=\left|\frac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$
- Area del triangolo di vertici $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$, $C\left(x_3,y_3\right)$:
  $A=\frac{1}{2}\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|$
- Ellisse: $e^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$; $a>b$
- Iperbole: $e^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2=2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2},0\right)$
- Integrali:
  $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a}+C$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+C$

Pagina bianca

VOLTATE IL FOGLIO.

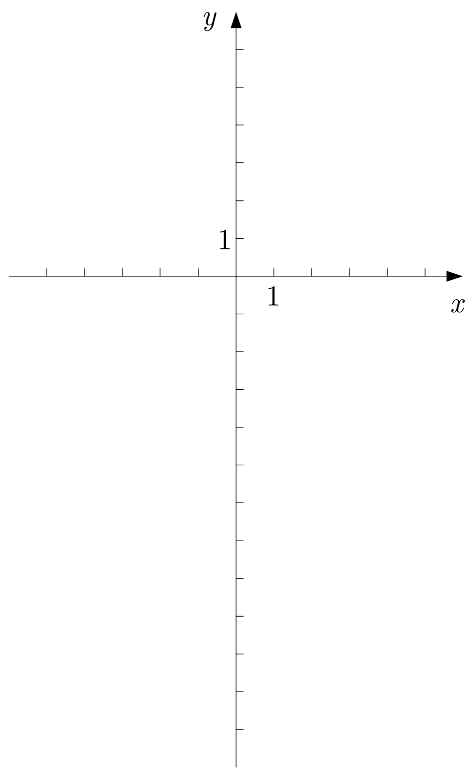
01. È data la funzione $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x}$.

a) Determinate gli zeri, i poli, gli asintoti e gli estremi della funzione.

(4 punti)

b) Tracciate il grafico della funzione f .

(3 punti)



c) Risolvete la disequazione $f(x) \leq 1$.

(2 punti)

d) Calcolate l'area della figura delimitata dalla retta $y = 1$ e dal grafico della funzione f .

(5 punti)

02. Sono dati i punti $A(2,1)$, $B(-1,4)$ e $C(-2,-3)$ nel piano.

a) Dimostrate che il triangolo ABC è rettangolo. Calcolate l'area del cerchio circoscritto al triangolo. Il risultato sia esatto.

(5 punti)

b) Calcolate le coordinate del punto A' che è la proiezione ortogonale del punto A sul segmento BC.

(3 punti)

c) Il punto M giace sul segmento AC. Scrivete le coordinate del punto M in modo che l'area del triangolo ABM sia uguale a 11.

(5 punti)

03. Risolvete gli esercizi seguenti relativi ai numeri complessi.

a) Nel piano complesso disegnate il numero complesso $z = 10\,(1+2\mathrm{i})^{-1}$.

(2 punti)

b) Calcolate tutti i numeri reali x, per i quali il numero
$z = 6x^3\mathrm{i}^{2009} + 5x^2\mathrm{i}^{2011} - 12x\mathrm{i}^{2013} + 4\mathrm{i}^{2007} + (x^2+1)\,\mathrm{i}^{2008} + x + 5$ sia un numero reale.

(5 punti)

c) È dato il numero complesso $w = 1 - \mathrm{i}$. Calcolate tutti i numeri complessi $z = x + \mathrm{i}y$, per i quali vale che $\operatorname{Re}(w \cdot z) = 0$ e $|z \cdot \overline{w}| = 2$.

(4 punti)

d) Disegnate nel piano complesso l'insieme di punti che soddisfano alla condizione $|z - 1| = 2$.

(2 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA