Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 1 2 1 4 0 2 1 2 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore

MATEMATICA

Prova d'esame 2

Sabato, 9 giugno 2012 / 90 minuti

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.
Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.
Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una „x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3.	4.

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 14 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, di cui 1 vuota e 3 riserva.

Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia

Formule

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1,\ h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:

$R = \frac{abc}{4A},\ r = \frac{A}{p},\ p = \frac{a+b+c}{2}$

Formule di bisezione:

$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\ \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},\ \tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

Teoremi di addizione:

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x\cos y}$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\operatorname{sen}x\cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right]$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$:

$A = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a},\ a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a},\ a$ è il semiasse reale

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

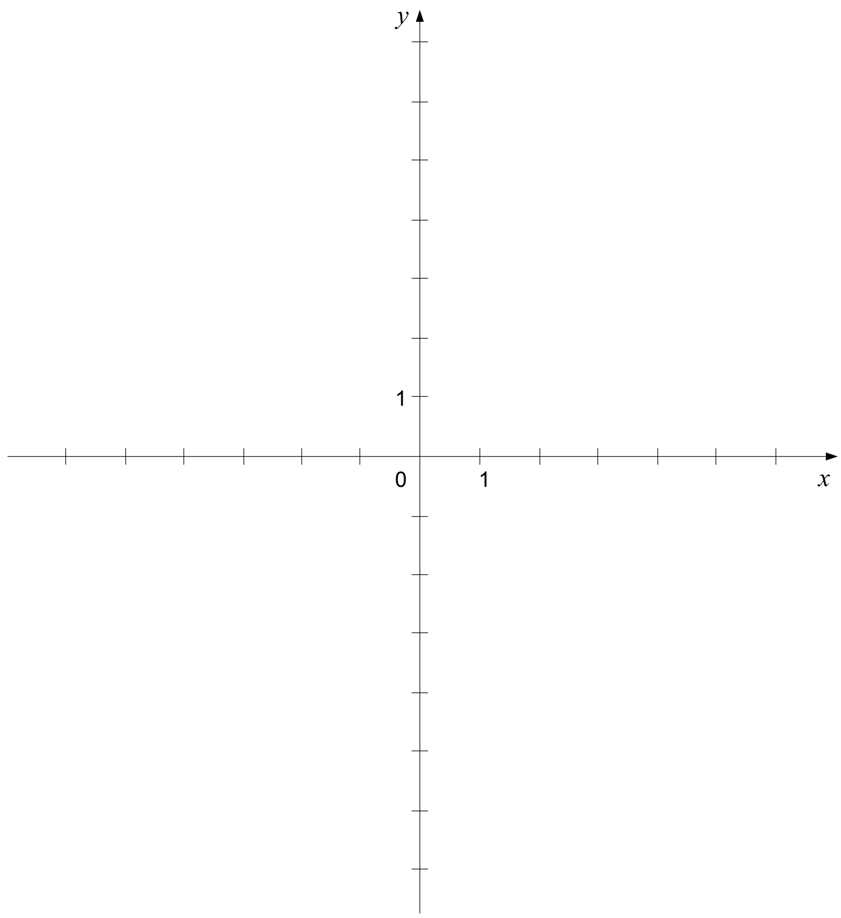
Integrale: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

Il problema 1 è obbligatorio.

1. Sono date le funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^{-1}$.

   1.1. Tracciate nel sistema di coordinate i grafici delle funzioni f e g.

   (2 punti)



   1.2. I grafici delle funzioni f e g si intersecano due volte, in ambedue le volte con lo stesso angolo. Calcolate le derivate delle funzioni e l'angolo tra i grafici delle funzioni in uno dei punti di intersezione.

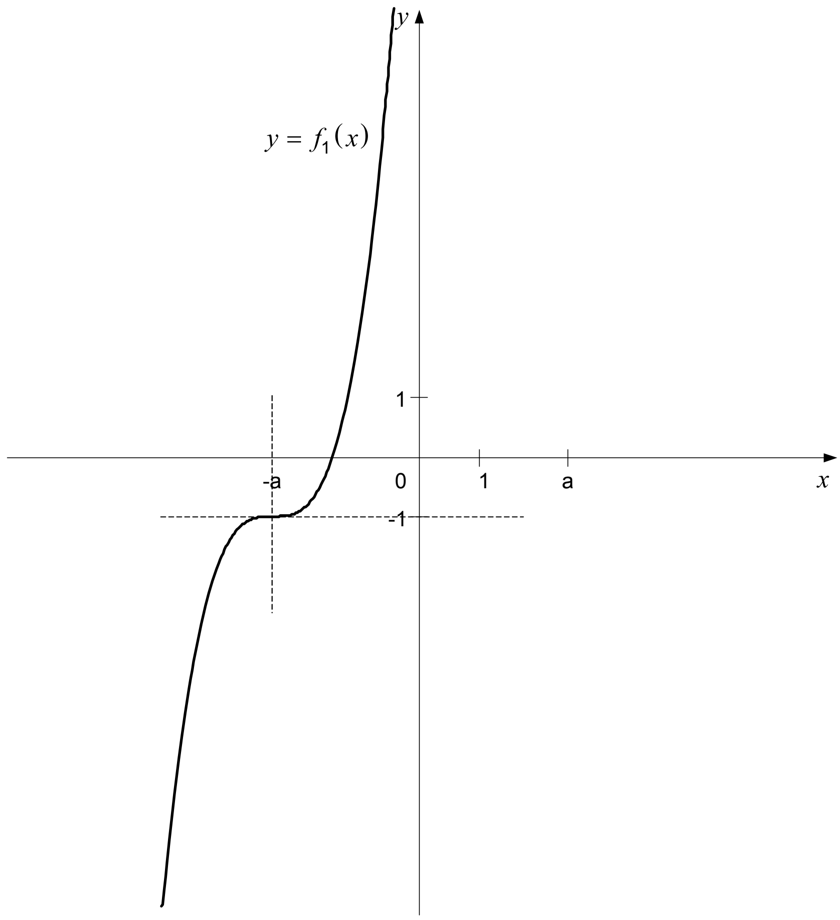
   (4 punti)

   1.3. Calcolate con esattezza il numero b, $b > 1$, per il quale l'area della figura delimitata dai grafici delle funzioni f e g, l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = b$, sia uguale a $\frac{5}{4}$.

   (4 punti)

1.4. Sia il numero $a > 0$. Nel sistema di coordinate è disegnato il grafico della funzione f_1 che è traslato rispetto al grafico della funzione f . Scrivete la funzione f_1. Nello stesso sistema di coordinate tracciate inoltre il grafico della funzione $g_1(x) = -(x-a)^{-1}$.

(4 punti)



Pagina vuota

VOLTATE IL FOGLIO.

Il problema 2 è obbligatorio.

2. Risolvete i quesiti:

   2.1. Una retta tange nel punto $A(-3,-1)$ la circonferenza $x^2 + y^2 = 10$. Scrivete l'equazione di tale retta.

   (3 punti)

   2.2. Qual è la posizione reciproca tra la retta $y = -3x - 10$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$? Argomentate la risposta.

   (3 punti)

   2.3. Calcolate il numero reale a in modo che l'asse x sia tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 + 2ax + 4y - a + 2 = 0$.

   (4 punti)

   2.4. Calcolate il numero reale b in modo che il centro della circonferenza $x^2 + y^2 + 2bx + 4y - b + 2 = 0$ appartenga alla retta $y = -3x - 10$.

   (4 punti)

Il problema 3 è a scelta. Avete la possibilità di scelta tra i problemi 3 e 4. Riportate la vostra scelta nella pagina iniziale del foglio d'esame.

3. È data la successione geometrica $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ Indichiamo il termine generale con a_n.

3.1. Calcolate la somma della serie geometrica $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$

(3 punti)

3.2. Scrivete il termine generale a_n della successione data. Quale termine della successione è uguale a 2^{-2012} ?

(3 punti)

3.3. Determinate quali termini della successione $b_n = a_n^{-1}$ sono maggiori di 10^{20} e minori di 10^{30}.

(3 punti)

3.4. Scrivete il termine generale della successione aritmetica $c_n = \log_2\left(a_n^{-1}\right)$. Sommate i primi trenta termini di questa successione.

(3 punti)

Il problema 4 è a scelta. Avete la possibilità di scelta tra i problemi 3 e 4. Riportate la vostra scelta nella pagina iniziale del foglio d'esame.

4. È dato il numero complesso $z_1 = -4 + 2\mathrm{i}$.

4.1. Calcolate il numero complesso w per il quale vale che $2w + \overline{w} = 20z_1^{-1} + 1$.

(4 punti)

4.2. Per quali numeri reali a vale che $|a + 4\mathrm{i}| = |z_1|$?

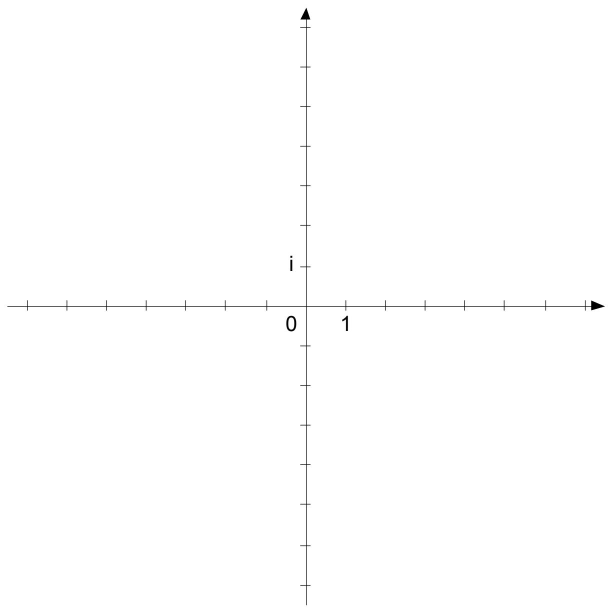
(2 punti)

4.3. Per quali numeri reali b è $(b + z_1)^2$ un numero immaginario (puro)?

(3 punti)

4.4. Disegnate nel piano complesso l'insieme di tutti i numeri complessi (punti) $z = x + y\mathrm{i}$ che sono equidistanti dal numero (punto) z_1 e dall'origine del piano complesso. Tra le componenti x e y sussiste la dipendenza $y = kx + n$. Calcolate k e n.

(3 punti)



PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA