Š i f r a   k a n d i d a t a :
A   j e l ö l t   k ó d s z á m a :

Državni izpitni center

M 1 2 1 4 0 2 1 2 M

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK
TAVASZI VIZSGAIDŐSZAK

Višja raven
Emelt szint

MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Sobota, 9. junij 2012 / 90 minut
2012. június 9., szombat / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, žepno računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, zsebszámológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 16 strani, od tega 3 rezervne.
A feladatlap 16 oldalas, ebből 3 tartalék.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 14 do 16 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg.Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	*4.*

*Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a **feladatlap** erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 14–16 oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmaznia kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1,\ \ b^2 = cb_1,\ \ v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \dfrac{abc}{4S},\ \ r = \dfrac{S}{s},\ \ s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}},\ \ \cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}},\ \ \tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2},\ \ \sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2},\ \ \cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1),\ \ B(x_2, y_2),\ \ C(x_3, y_3)$:

$S = \dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \dfrac{e}{a},\ a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2,\ \varepsilon = \dfrac{e}{a},\ a$ je realna polos

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1,\ v_c^2 = a_1b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \frac{abc}{4S},\ r = \frac{S}{s},\ s = \frac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\ \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\ \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Összegek szorzattá történő átalakításának képletei:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

A szorzatok összeggé történő átalakításának képletei:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

A $T_0(x_0,y_0)$ *pont távolsága az* $ax+by-c=0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0,p) = \left|\frac{ax_0+by_0-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Az $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a},\ a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a}$, a *a hiperbola valós tengelye*

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\frac{p}{2},0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett függvény: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integrál: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arc\tan\frac{x}{a} + C$

Naloga 1 je obvezna.
Az 1. feladatot kötelező megoldani.

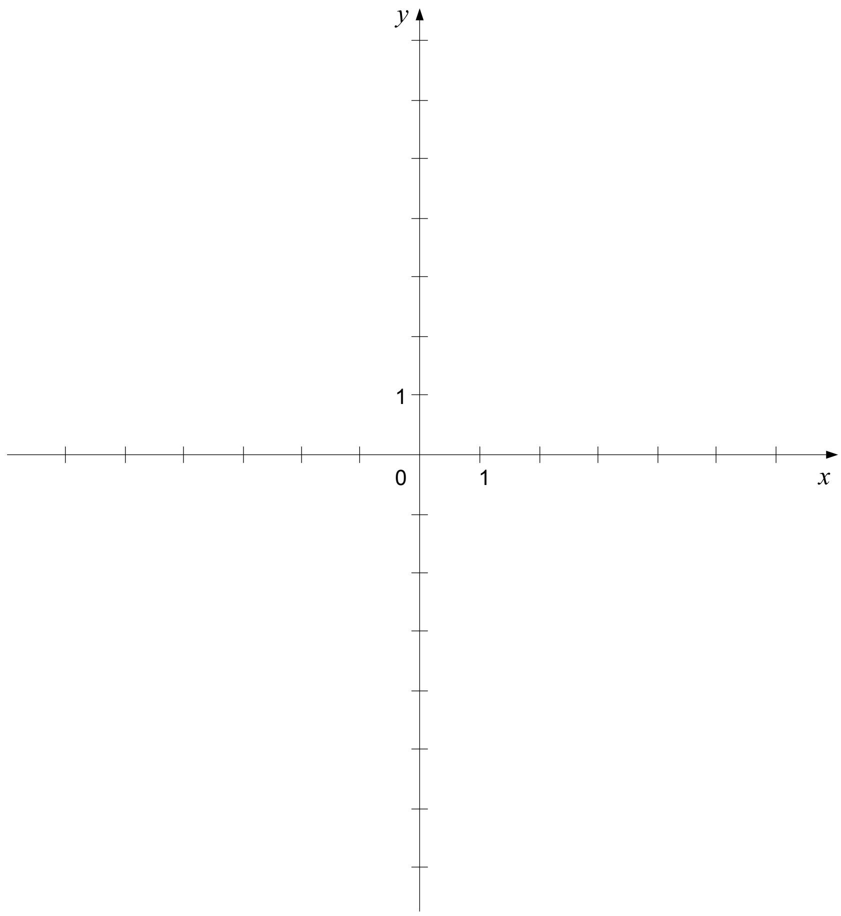
1. Dani sta funkciji $f(x)=x^3$ in $g(x)=x^{-1}$.

   Adottak az $f(x)=x^3$ és a $g(x)=x^{-1}$ függvények.

   1.1. V koordinatni sistem narišite grafa funkcij f in g.

   Ábrázolja a koordináta-rendszerben az f és a g függvény grafikonját!

(2 točki/pont)



   1.2. Grafa funkcij f in g se sekata dvakrat, obakrat pod istim kotom. Izračunajte odvoda funkcij in kot med grafoma v enem od presečišč.

   Az f és g függvény kétszer metszi egymást, mindkétszer azonos szögben. Számítsa ki a függvények deriváltját, és a függvények által közbezárt szöget valamelyik metszéspontban!

(4 točke/pont)

   1.3. Natančno izračunajte število b, $b>1$, za katero je ploščina lika, omejenega z grafoma funkcij f in g, abscisno osjo in premico z enačbo $x=b$, enaka $\frac{5}{4}$.

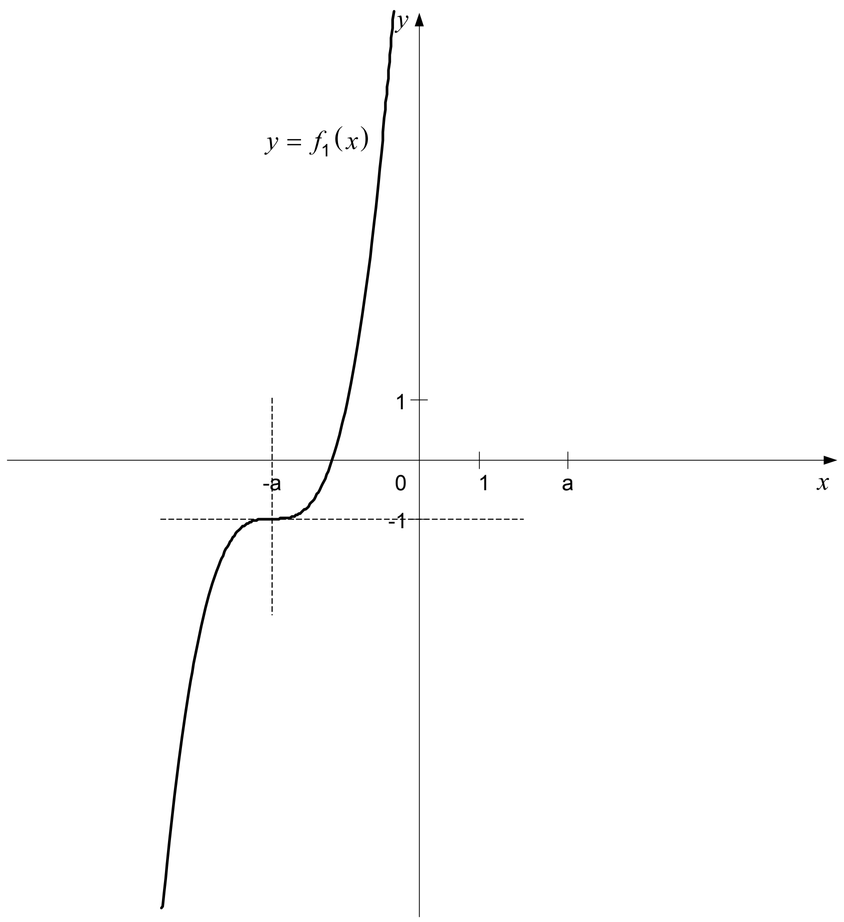
   Pontosan számítsa ki azt a b, $b>1$ számot, amelyre fennáll, hogy az f és g függvények, az abszcisszatengely és az $x=b$ egyenletű egyenes által határolt síkidom területe $\frac{5}{4}$ -del egyenlő.

(4 točke/pont)

1.4. Naj bo število $a > 0$. V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije f_1, ki je vzporedno premaknjen graf funkcije f. Zapišite funkcijski predpis za funkcijo f_1. V ta koordinatni sistem narišite še graf funkcije $g_1(x) = -(x-a)^{-1}$.

Legyen $a > 0$. A koordináta-rendszerben ábrázoltuk az f_1 függvény grafikonját, amely az f függvény grafikonjának párhuzamos eltolásával keletkezett. Írja fel az f_1 függvény egyenletét! Ugyanebben a koordináta-rendszerben ábrázolja még a $g_1(x) = -(x-a)^{-1}$ függvény grafikonját is!

(4 točke/pont)



Naloga 2 je obvezna.
Az 2. feladatot kötelező megoldani.

2. Rešite te naloge:

   Oldja meg a következő feladatokat:

   2.1. Premica se v točki $A(-3,-1)$ dotika krožnice $x^2+y^2=10$. Napišite enačbo te premice.

   Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $A(-3,-1)$ pontban érinti az $x^2+y^2=10$ egyenletű körvonalat.

   (3 točke/pont)

   2.2. Kakšna je medsebojna lega premice $y=-3x-10$ in krožnice $x^2+y^2-8x+4y-20=0$? Odgovor utemeljite.

   Milyen az $y=-3x-10$ egyenes és a $x^2+y^2-8x+4y-20=0$ körvonal kölcsönös helyzete? Válaszát indokolja!

   (3 točke/pont)

   2.3. Izračunajte realno število a tako, da bo os x tangenta krožnice $x^2+y^2+2ax+4y-a+2=0$.

   Számítsa ki azt az a valós számot, amelyre az x tengely a $x^2+y^2+2ax+4y-a+2=0$ körvonal érintője.

   (4 točke/pont)

   2.4. Izračunajte realno število b tako, da bo središče krožnice $x^2+y^2+2bx+4y-b+2=0$ ležalo na premici $y=-3x-10$.

   Számítsa ki azt a b valós számot, amelynél az $x^2+y^2+2bx+4y-b+2=0$ egyenletű körvonal középpontja az $y=-3x-10$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

   (4 točke/pont)

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.
A 3. feladat választható. A 3-as és a 4-es sorszámú feladatok közül választhat. A címlapon jelölje be választását!

3. Dano je geometrijsko zaporedje $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ Splošni člen označimo z a_n.

Adott az $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ *mértani sorozat. Az általános tagot jejölje* a_n .

3.1. Izračunajte vsoto geometrijske vrste $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$

Számítsa ki a $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ *mértani sor összegét!*

(3 točke/pont)

3.2. Zapišite splošni člen a_n danega zaporedja. Kateri člen tega zaporedja je enak 2^{-2012} ?

Írja fel az adott sorozat a_n *általános tagját! A sorozat hányadik tagja egyenlő* 2^{-2012} *-nel?*

(3 točke/pont)

3.3. Ugotovite, kateri členi zaporedja $b_n = a_n^{-1}$ so večji od 10^{20} in manjši od 10^{30} .

Határozza meg, hogy a $b_n = a_n^{-1}$ *sorozat mely tagjai nagyobbak* 10^{20} *-nál és kisebbek* 10^{30} *-nál!*

(3 točke/pont)

3.4. Zapišite splošni člen aritmetičnega zaporedja $c_n = \log_2\left(a_n^{-1}\right)$. Seštejte prvih trideset členov tega zaporedja.

Írja fel a $c_n = \log_2\left(a_n^{-1}\right)$ *számtani sorozat általános tagját! Adja össze ennek a sorozatnak az első harminc tagját!*

(3 točke/pont)

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.
A 4. feladat választható. A 3-as és a 4-es sorszámú feladatok közül választhat. A címlapon jelölje be választását!

4. Dano je kompleksno število $z_1 = -4 + 2\mathrm{i}$.

   Adott a $z_1 = -4 + 2\mathrm{i}$ komplex szám.

   4.1. Poiščite kompleksno število w, za katero je $2w + \overline{w} = 20z_1^{-1} + 1$.

   Keresse meg azt a w komplex számot, amelyre fennáll a $2w + \overline{w} = 20z_1^{-1} + 1$ összefüggés!

   (4 točke/pont)

   4.2. Za katera realna števila a je $|a + 4\mathrm{i}| = |z_1|$?

   Mely a valós számokra igaz az $|a + 4\mathrm{i}| = |z_1|$ összefüggés?

   (2 točki/pont)

   4.3. Za katera realna števila b je $(b + z_1)^2$ (čisto) imaginarno število?

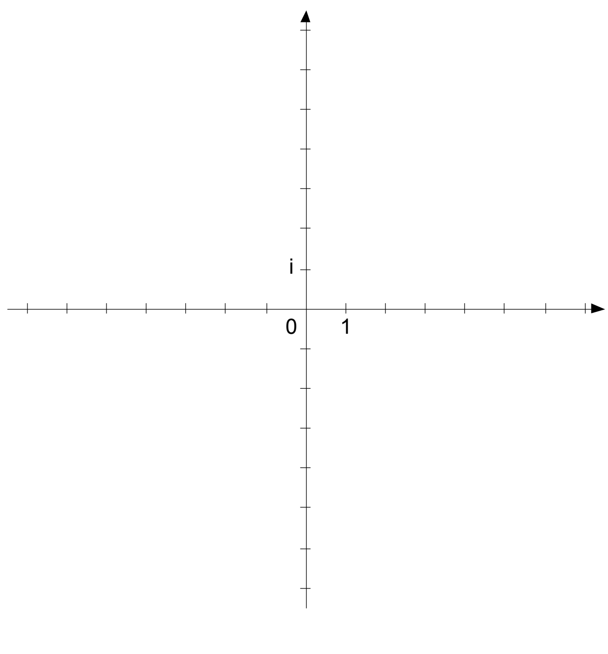
   Mely b valós számokra lesz a $(b + z_1)^2$ szám tiszta képzetes szám?

   (3 točke/pont)

   4.4. Narišite v kompleksni ravnini množico vseh kompleksnih števil (točk) $z = x + y\mathrm{i}$, ki so enako oddaljena od števila (točke) z_1 in izhodišča kompleksne ravnine. Med komponentama x in y velja zveza $y = kx + n$. Izračunajte k in n.

   Ábrázolja a komplex számsíkon a $z = x + y\mathrm{i}$ komplex számok (pontok) azon halmazát, amelyek a z_1 számtól (ponttól) és a koordináta-rendszer kezdőpontjától egyenlő távolságra vannak. Az x és y komponensek között érvényes az $y = kx + n$ összefüggés. Számítsa ki a k-t és az n-t!

   (3 točke/pont)



REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL