



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE AUTUNNALE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

**Lunedì, 26 agosto 2013 / 90 minuti**

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello. Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, di cui 1 vuota.*



## Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n$  è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\text{Distanza del punto } T_0(x_0, y_0) \text{ dalla retta } ax + by - c = 0: d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ,  $a > b$

Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ,  $a$  è il semiasse reale

Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli:  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

1. È dato il numero di quattordici cifre  $2222200000111a$ . Scrivete tutti i possibili valori della cifra  $a$ , per i quali il numero dato è

divisibile per 2: \_\_\_\_\_

divisibile per 3: \_\_\_\_\_

divisibile per 4: \_\_\_\_\_

divisibile per 5: \_\_\_\_\_

divisibile per 6: \_\_\_\_\_

divisibile per 9: \_\_\_\_\_

divisibile per 10: \_\_\_\_\_

(7 punti)

2. Semplificate l'espressione  $\frac{a+1}{a+6} - \frac{(a+2)(a-4)}{a^2+4a-12}$ , se  $a \neq -6$  e  $a \neq 2$ .

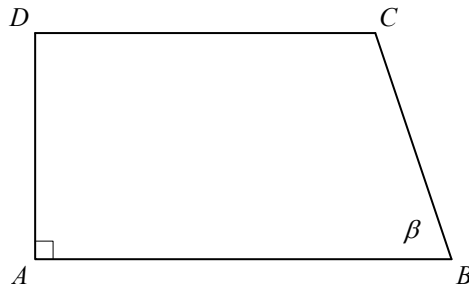
(5 punti)

3. Risolvete l'equazione  $x(x-2)+5=0$  e riportate le soluzioni nel piano complesso.



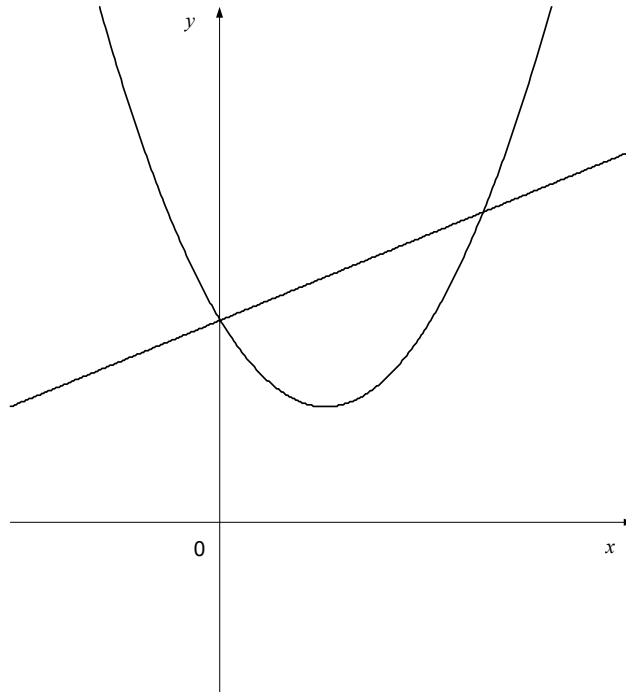
(5 punti)

4. Nella figura è disegnato il quadrilatero  $ABCD$ .  $|AB| = 11$ ,  $|AD| = 6$ ,  $|DC| = 9$ , il lato  $AB$  è parallelo al lato  $CD$ , l'angolo  $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ . Come si chiama questo quadrilatero? Calcolate con esattezza la lunghezza del lato  $BC$  e l'ampiezza dell'angolo  $\sphericalangle ABC = \beta$  al decimo di grado.



(5 punti)

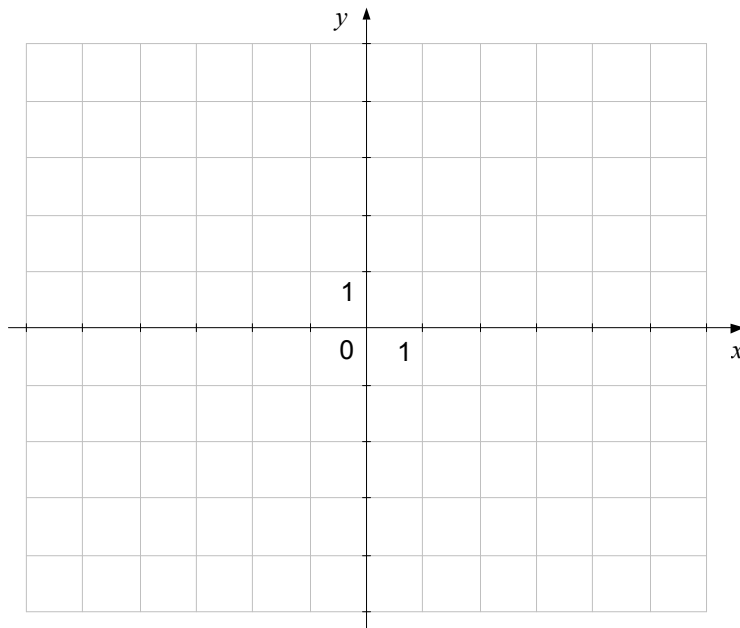
5. Nella figura sono disegnati i grafici delle funzioni  $f(x) = x^2 - 2x + \frac{7}{3}$  e  $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{7}{3}$ . Calcolate le intersezioni dei grafici  $f$  e  $g$ . Risolvete la disequazione  $f(x) > g(x)$ . Risolvete il quesito senza far uso della calcolatrice tascabile.



(8 punti)



6. Nel sistema di coordinate dato, disegnate l'ellisse  $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$ . Scrivete il centro e i vertici dell'ellisse.



(8 punti)

7. Nel rettangolo  $ABCD$  le lunghezze dei lati siano  $|AB| = 4$  e  $|AD| = 3$ . Il punto  $T$  giaccia sul lato  $AD$  in modo che  $|AT| = 1$ . Siano  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  e  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Disegnate lo schizzo indicando i vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\overrightarrow{BT}$ .

Esprimete il vettore  $\overrightarrow{BT}$  con i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

Dimostrate che i vettori  $\overrightarrow{BT}$  e  $\frac{3}{16}\vec{a} + \vec{b}$  sono ortogonali.



(8 punti)

8. Risolvete il quesito senza far uso della calcolatrice tascabile.

Applicando le espressioni tra le funzioni goniometriche, calcolate con esattezza il valore dell'espressione  $\sin 2x$ , se  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  e  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

(6 punti)

9. Risolvete il quesito senza far uso della calcolatrice tascabile.  
Risolvete le equazioni:

$$\log_x \frac{5}{3} = -1$$

(2)

$$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{9}$$

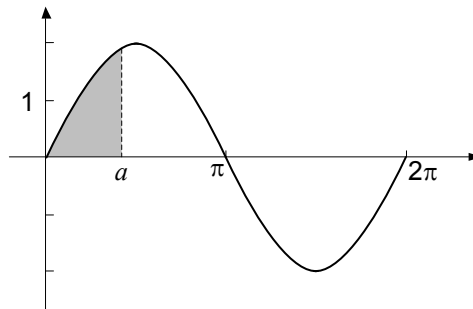
(4)

(6 punti)

10. Tutti i termini di una successione aritmetica sono numeri positivi. Il prodotto tra il primo e il terzo termine della successione è uguale a 5, la somma tra il quinto e il settimo termine è uguale a 10. Calcolate il primo termine e la ragione della successione. Scrivete il termine generale e il trecentesimo termine della successione.

*(8 punti)*

11. Nella figura è disegnato il grafico della funzione  $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ . Calcolate il numero reale  $a \in (0, \pi)$  in modo che l'area della parte ombreggiata della figura tra il grafico della funzione  $f$ , la retta  $x = a$  e l'asse delle ascisse sia uguale a 1.



(7 punti)

12. A un congresso scientifico partecipano 10 fisici e 8 chimici. Uno solo tra i fisici si chiama France, uno solo tra i chimici si chiama Klemen. I partecipanti al congresso devono eleggere al loro interno un comitato di presidenza formato da 5 membri, di cui 3 devono essere fisici e 2 devono essere chimici.

In quanti modi è possibile procedere all'elezione, se non ci sono altre condizioni?

(2)

Calcolate la probabilità dell'evento  $A$ , che nella presidenza ci sia almeno una delle due persone menzionate in precedenza (il fisico France o il chimico Klemen) se i membri per la presidenza vengono scelti a caso tra i fisici e i chimici.

(5)

(7 punti)

**Pagina vuota**