



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE AUTUNNALE

Livello di base
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 1 ≡

Venerdì, 25 agosto 2017 / 120 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello. Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax+by-c=0$: $d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, a è il semiasse reale

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

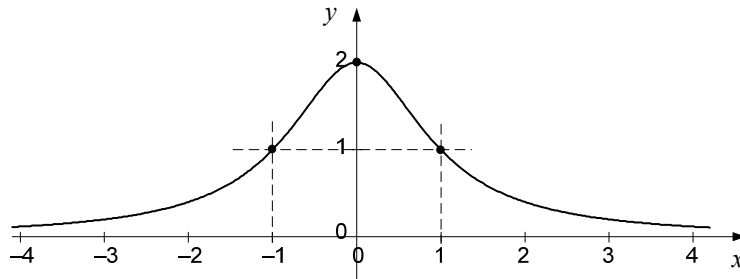


1. Scrivete l'equazione della retta p che passa per i punti $T_1(4, 1)$ e $T_2(-2, 4)$. Determinate l'ordinata y_3 del punto $T_3(-12, y_3)$ in modo che esso appartenga alla retta p .

(6 punti)



2. La figura mostra una parte del grafico della funzione derivabile f che si avvicina asintoticamente all'asse delle ascisse e il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. La funzione f non ha zeri. Scrivete le constatazioni che valgono per tale funzione e che si possono dedurre dal grafico.



L'insieme di definizione della funzione f	$D_f =$
L'insieme immagine della funzione f	$I_f =$
Le coordinate dell'intersezione del grafico della funzione f con l'asse delle ordinate	
Il valore della funzione f per $x = -1$	$f(-1) =$
Per quale valore di x la funzione f raggiunge il massimo assoluto?	
La funzione f è pari o dispari? Argomentate la risposta.	
Scrivete il valore di $f'(0)$	$f'(0) =$

(8 punti)



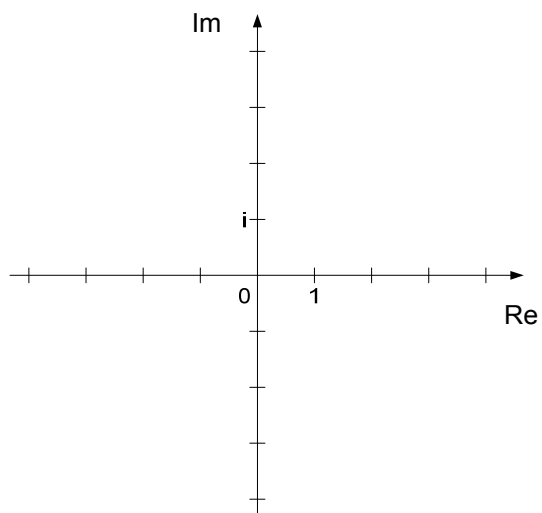
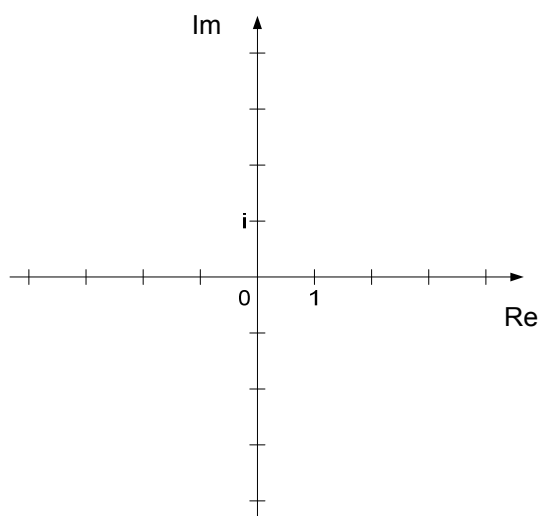
3. La somma delle lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo è 56, la lunghezza della sua ipotenusa è 40. Calcolate le lunghezze dei cateti.

(6 punti)



4. Disegnate nel piano complesso gli insiemi di punti
 $A = \{z \in \mathbb{C}; (-1 \leq \operatorname{Re} z < 2) \wedge (1 \leq \operatorname{Im} z < 3)\}$ e
 $B = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 3\}$.

Scegliete un numero z_1 dell'insieme A e scrivetelo nella forma $z_1 = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Insieme A Insieme B

(6 punti)



5. Calcolate l'integrale indefinito $\int \left(\frac{2x^2 - 3}{x} + \sqrt[3]{x^2} - e^x + 5 \right) dx$.

(8 punti)



6. I punti A , B e S giacciono su uno stesso piano. Il punto $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ è il punto medio del segmento AB . Scrivete le coordinate del punto B se $A(3, 4)$. I raggi vettori \vec{r}_A e \vec{r}_B sono perpendicolari tra loro? Argomentate la risposta.

(7 punti)

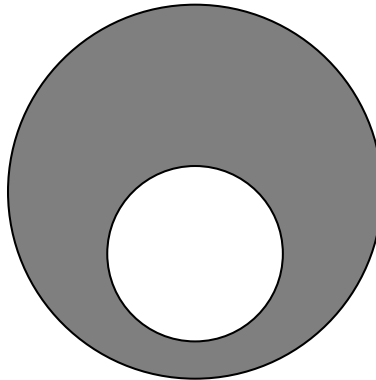


7. La base di una piramide retta è un rettangolo di lati $a=12$ e $b=5$, l'altezza della piramide è 8. Disegnate lo schizzo e indicate su di esso l'angolo φ tra lo spigolo laterale e la base. Calcolate il volume della piramide e l'ampiezza dell'angolo φ con l'esattezza al decimo di grado.

(7 punti)



8. La figura mostra una parte di piano delimitata dalle curve di equazione $(x-3)^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$. Calcolate l'area della parte ombreggiata tra le curve. Il risultato sia esatto.



(6 punti)



9. Gli angoli α , β e γ sono gli angoli acuti di un triangolo. Dimostrate, senza far uso della calcolatrice, che $\sin \gamma = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ se $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\beta = 30^\circ$.

(6 punti)



10. Scegliamo a caso due numeri tra i primi 30 numeri naturali. Calcolate la probabilità degli eventi:

A – ambedue i numeri sono pari,

B – almeno un numero è un multiplo del numero 3.

(7 punti)



11. Il prezzo di un maglione è ribassato del 20 % ma, non essendo stato venduto, viene ulteriormente ribassato del 30 %. Dopo il secondo ribasso Jan ha acquistato il maglione pagandolo 30,24 €. Rispondete con delle frasi alle domande seguenti.

Quale percentuale del prezzo iniziale del maglione è stata pagata da Jan?

Qual era il prezzo iniziale del maglione?

Qual era il prezzo del maglione immediatamente prima del secondo ribasso?

(5 punti)



12. È data una successione di termine generale $a_n = \frac{1+2^n}{4^n}$.

12.1. Calcolate e scrivete i primi tre termini di tale successione.

(2)

12.2. Calcolate il limite di tale successione.

(1)

12.3. Scrivete la successione come somma di due successioni geometriche e calcolate la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(5)

(8 punti)



PAGINA DI RISERVA