Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 1 9 1 4 0 2 1 2 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
Prova d'esame 2

Sabato, 8 giugno 2019 / 90 minuti

Materiali e sussidi consentiti:
Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.
Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.
Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una "x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3	4

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 12 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 5 di riserva.

M 1 9 1 4 0 2 1 2 I 0 2

Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia

Non scrivete nel campo grigio.

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

Formule di bisezione:

$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

Teoremi di addizione:

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$A = \frac{1}{2} \left| (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right|$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, se $a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

Il quesito 1 è obbligatorio.

1. Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.
È data l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

1.1. Calcolate le equazioni delle rette tangenti all'iperbole data nei punti $D_1(\sqrt{2}, 1)$ e $D_2(\sqrt{2}, -1)$.

(3 punti)

1.2. La retta tangente t di equazione $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$ interseca l'asintoto di equazione $y = x$ dell'iperbole data nel punto P. Siano F_1 e F_2 i fuochi dell'iperbole data. Calcolate i punti P, F_1 e F_2 e scrivete l'equazione della circonferenza che passa per questi tre punti.

(7 punti)

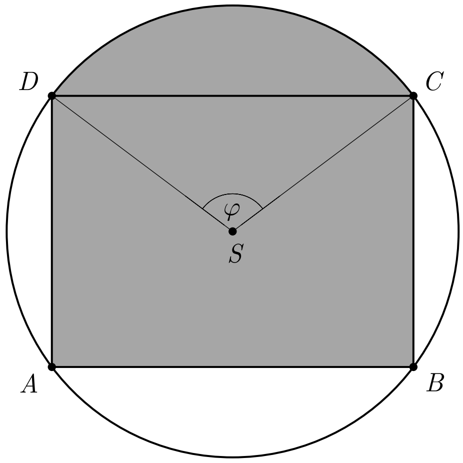
1.3. Il settore delimitato dalla retta tangente t di equazione $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$, dall'iperbole data e dall'asse delle ascisse viene ruotato attorno all'asse delle ascisse di $360°$. Calcolate il volume del solido di rotazione così ottenuto.

(4 punti)

M 1 9 1 4 0 2 1 2 I 0 6

Il quesito 2 è obbligatorio.

2. È data una circonferenza di raggio 6 e centro S. Indichiamo i punti A, B, C e D sulla circonferenza in modo che gli angoli $\sphericalangle BAD$ e $\sphericalangle ABC$ siano angoli retti (vedi in figura una delle possibili situazioni da disegnare). L'ampiezza dell'angolo $\sphericalangle CSD$ dipende dalla scelta delle posizioni dei punti A, B, C e D sulla circonferenza.



2.1. Dimostrate che per quattro punti qualsiasi A, B, C e D l'area del settore ombreggiato in funzione dell'ampiezza dell'angolo $\varphi = \sphericalangle CSD$ è uguale a $S(\varphi) = 54\,\mathrm{sen}\,\varphi + 18\varphi$, se l'angolo φ è espresso in radianti.

(4 punti)

2.2. Per quale angolo ottuso $\varphi = \sphericalangle CSD$ l'area del settore ombreggiato è massima? Arrotondate l'ampiezza dell'angolo al decimo di grado.

(4 punti)

2.3. La figura soprastante rappresenta anche la sezione di una galleria con un piano che è ortogonale alla direzione di guida. La circonferenza della figura ha il raggio di 6 m, la larghezza della galleria è $|AB| = 6$ m, la sua lunghezza è invece di 120 m. Il soffitto curvo e le pareti della galleria devono essere tinteggiate con della vernice; l'impresa che deve eseguire il lavoro ha acquistato 400 ℓ di vernice. La quantità di vernice acquistata sarà sufficiente, se per tinteggiare 40 m^2 di superficie si consumano esattamente 5 ℓ di vernice? Scrivete la risposta e argomentatela.

(6 punti)

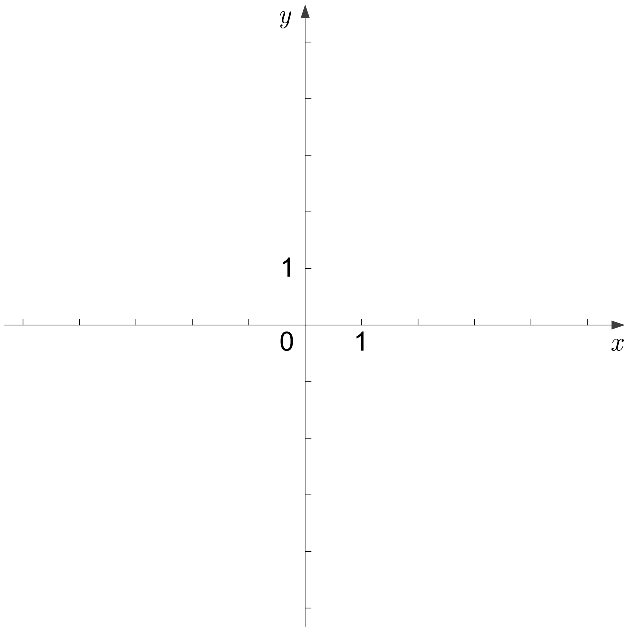
Non scrivete nel campo grigio.

M 1 9 1 4 0 2 1 2 I 0 8

Il quesito 3 è a scelta. Scegliete tra i quesiti 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina di questa prova d'esame.

3. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ espressa dalla dipendenza $f(x)=2^{-\frac{x}{2}}$.

3.1. Tracciate il grafico della funzione f.



(1 punto)

3.2. Calcolate l'equazione della normale al grafico della funzione f nell'intersezione del grafico della funzione f e la retta di equazione $y=\sqrt{2}$. Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.

(5 punti)

3.3. Scrivete la dipendenza della funzione inversa f^{-1} della funzione f. Calcolate inoltre $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ e $f^{-1}(1)$ e dimostrate che l'equazione $f(x)=f^{-1}(x)$ ha nell'intervallo $\left[\frac{1}{2},\, 1\right]$ almeno una soluzione.

(4 punti)

3.4. Calcolate il limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

(2 punti)

M 1 9 1 4 0 2 1 2 I 1 0

Il quesito 4 è a scelta. Scegliete tra i quesiti 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina di questa prova d'esame.

4. Per un numero reale x qualsiasi, definiamo la successione geometrica il cui primo termine è uguale a x, il secondo termine è uguale a $x^3 - 4x$.

4.1. Determinate tutti i numeri reali x, per i quali il secondo termine è uguale a 15. Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.

(2 punti)

4.2. Determinate tutti i numeri reali x, per i quali la rispettiva serie geometrica è convergente. Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.

(7 punti)

4.3. Sia $x = \frac{11}{5}$ e abbia la rispettiva successione geometrica il termine generale a_n.

Determinate il più piccolo numero naturale n, per il quale la differenza $\sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ sia minore di $\frac{1}{100}$.

(3 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

M 1 9 1 4 0 2 1 2 I 1 6

PAGINA DI RISERVA