



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



M 2 0 1 4 0 2 1 1 1

SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

**Sabato, 6 giugno 2020 / 90 minuti**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.*

*Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.*





## Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n$  è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , se  $a > b$

Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

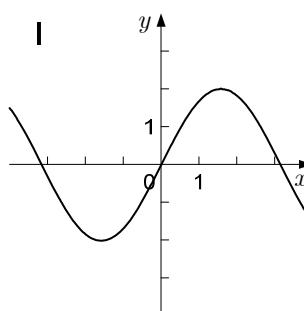
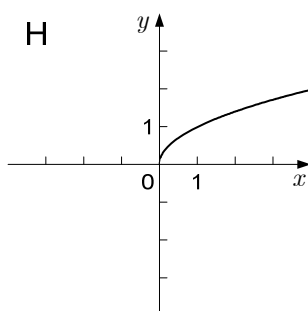
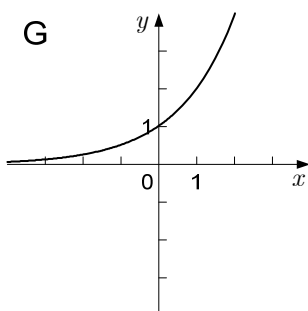
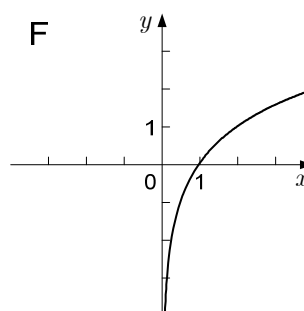
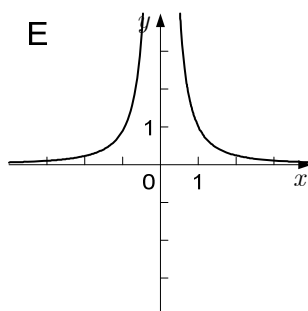
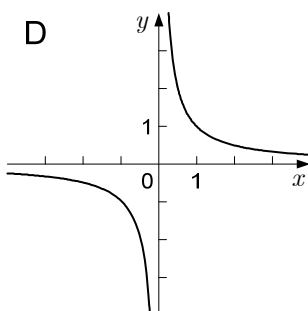
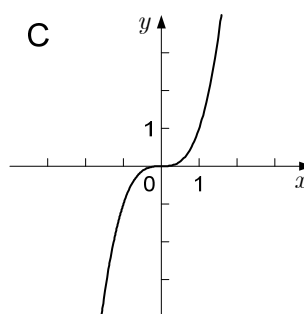
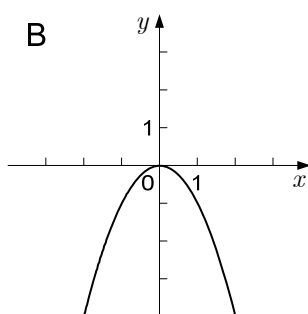
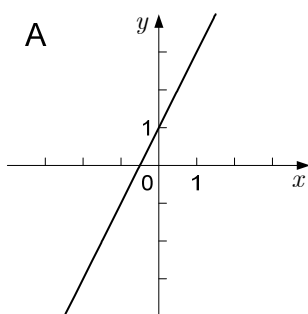
Formula di Bernoulli:  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

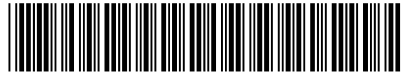


1. Nella tabella sono date alcune funzioni. Per ciascuna funzione, scrivete la lettera che identifica il grafico a essa corrispondente (vedi l'esempio risolto).

Funzione	Grafico (scrivete la lettera corrispondente al grafico della funzione)
$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$	H
$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-1}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$	
$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-2}$	
$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$	



(6 punti)



M 2 0 1 4 0 2 1 1 1 0 5

2. La somma di due numeri è uguale a 5661. Il secondo numero è del 22 % maggiore del valore del primo numero. Calcolate i due numeri.

(5 punti)

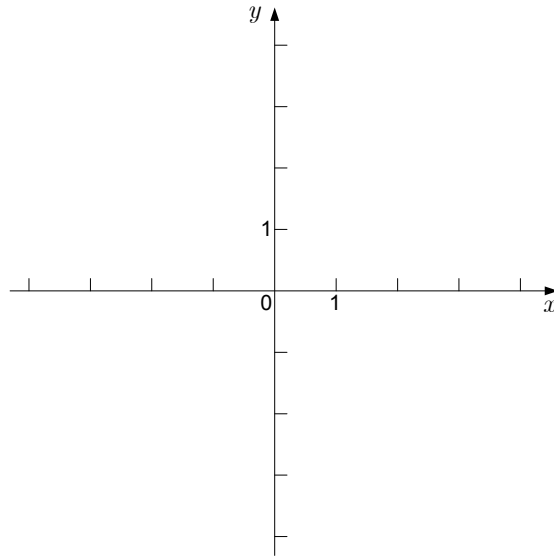


3. Fate lo schizzo del rettangolo  $ABCD$  e di due semirette che partono ambedue dal vertice  $A$ , le due semirette dimezzano una il lato  $BC$  e l'altra il lato  $CD$ . Calcolate l'ampiezza dell'angolo  $\varphi$  tra le due semirette se  $|AB| = 6$  cm e  $|AD| = 4$  cm .

(5 punti)



4. È data la funzione quadratica  $f$  con la dipendenza  $f(x) = -2x^2 - 4x$ . Calcolate gli zeri della funzione data, calcolatene il vertice e tracciatene il grafico. Scrivete tutti i valori di  $x$ , per i quali vale che  $f(x) > 0$ . In quale intervallo la funzione è crescente? Scrivete l'intervallo massimo in questo caso. Risolvete l'equazione  $f(x) = -10$ . Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.



(8 punti)



5. Risolvete le seguenti equazioni senza usare la calcolatrice:

5.1.

$$9^{x-3} = 3\sqrt{3}$$

(3)

5.2.

$$\log_{\frac{1}{5}}(3x-2) = -2$$

(3)

(6 punti)





6. Nel quadrato di vertici  $A, B, C, D$  e con il lato di lunghezza  $a$ , il punto  $P$  è il punto medio del lato  $CD$ . Il punto  $T$  appartiene al lato  $BC$  in modo che  $|BT|:|TC| = 1:3$ . Disegnate lo schizzo. Esprimete con i vettori  $\vec{a} = \overline{AB}$  e  $\vec{b} = \overline{AD}$  i vettori  $\overline{AT}$  e  $\overline{AP}$ . Verificate che il prodotto scalare tra i vettori  $\overline{AT}$  e  $\overline{AP}$  è uguale a  $\frac{3}{4}a^2$ .

(7 punti)

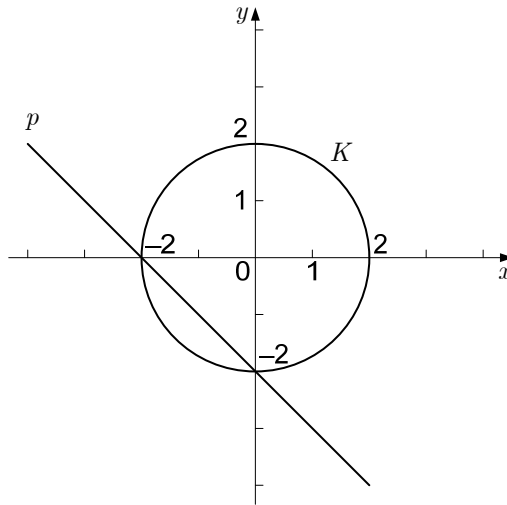


7. Sia  $a \in \mathbb{Z}$ . Il valore dell'espressione  $(1 - \sin x)^2 + \cos^2 x - 2$  è uguale al valore dell'espressione  $a \cdot \sin x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Calcolate  $a$ . Per quali  $x \in \mathbb{R}$  il valore di tale espressione è uguale a 1?

(6 punti)



8. Nella figura sottostante sono disegnate la circonferenza  $K$  e la retta  $p$ .



- 8.1. Scrivete le equazioni delle due funzioni disegnate.

(3)

- 8.2. Calcolate l'area del più piccolo segmento circolare delimitato dalla retta  $p$  e dalla circonferenza  $K$ .

(4)

(7 punti)



9. La funzione  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è espressa dalla dipendenza  $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2\cos x + e^{3x}$ .

9.1. Calcolate la derivata della funzione  $f$ .

(3)

9.2. Calcolate l'integrale indefinito della funzione  $f$ .

(3)

(6 punti)



10. Sono date le successioni con i termini generali  $a_n = \frac{3n}{2n+1}$ ,  $b_n = 2^n + 1$  e  $c_n = 3^{-n}$ .

10.1. Dimostrate che la successione con il termine generale  $a_n$  è limitata.

(3)

10.2. Dimostrate che la successione con il termine generale  $b_n$  è crescente.

(3)

10.3. Calcolate  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

(2)

(8 punti)



11. Sono date le cifre 1, 2, 3, 4 e 7.

11.1. Componiamo a caso con le cifre date un numero di tre cifre, nel quale le cifre si possono ripetere. Qual è la probabilità di comporre un numero divisibile per 4?

(4)

11.2. Componiamo a caso con le cifre date un numero di tre cifre, nel quale le cifre non si devono ripetere. Qual è la probabilità di comporre un numero divisibile per 3?

(4)

(8 punti)



12. In una piramide retta a base quadrata l'altezza di una faccia laterale  $h_1$  è di 4 cm più lunga dell'altezza della piramide  $h$ . Calcolate la lunghezza dello spigolo di base della piramide se il suo volume è di  $22 \text{ cm}^3$ . Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.

*(8 punti)*



PAGINA DI RISERVA