Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

M 2 0 1 4 0 2 1 2 M

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK
TAVASZI VIZSGAIDŐSZAK

Višja raven
Emelt szint
MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Sobota, 6. junij 2020 / 90 minut
2020. június 6., szombat / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, számológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 20 strani, od tega 5 rezervnih in 3 prazne.
A feladatlap 20 oldalas, ebből 5 tartalék és 3 üres.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 14 do 18 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg. Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	*4.*

*Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a **feladatlap** erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 14–18. oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmazniuk kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$:

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

M 2 0 1 4 0 2 1 2 M 0 4

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1 b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Összegek szorzattá történő átalakításának képletei:

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$

A szorzatok összeggé történő átalakításának képletei:

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

A $T_0(x_0, y_0)$ *pont távolsága az* $ax + by - c = 0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Az $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, *ha* $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett (kompozítum) függvény: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrál: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

Prazna stran

Üres oldal

OBRNITE LIST.
LAPOZZON!

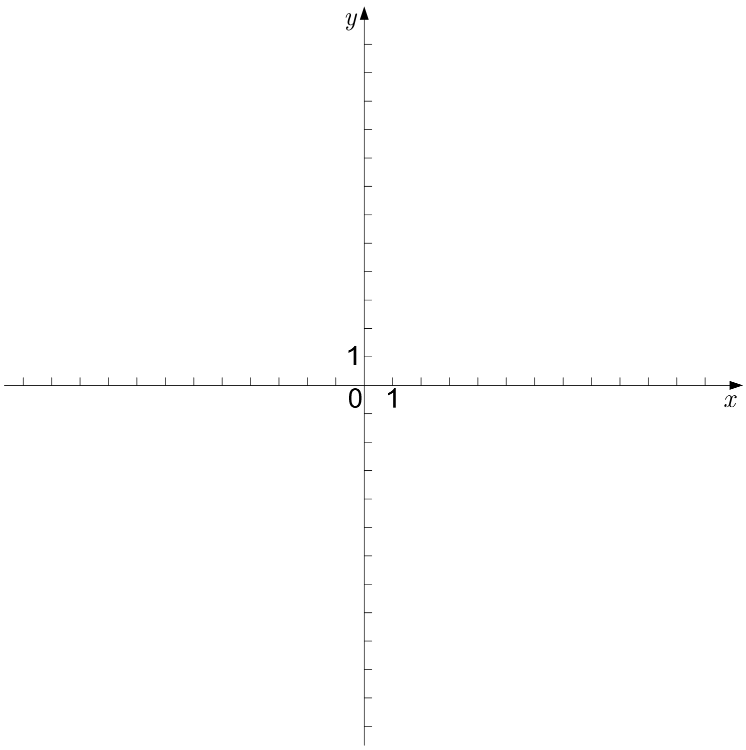
Naloga 1 je obvezna. / *Az 1. feladat kötelező.*

1. Dana je funkcija f s predpisom $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+1}$.

Adott az $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+1}$ hozzárendelési szabállyal megadott f függvény.

1.1. Zapišite ničli in pol funkcije f. Zapišite enačbo poševne asimptote grafa funkcije f in graf narišite.

Írja fel az f függvény mindkét zérushelyét és a pólusát! Írja fel az f függvény ferde aszimptotájának egyenletét, és ábrázolja a grafikonját!



(4 točke/pont)

1.2. Izračunajte, pod kolikšnim kotom graf funkcije f seka ordinatno os.

Számítsa ki az f függvény grafikonja és az ordinátatengely hajlásszögét!

(3 točke/pont)

1.3. Zapišite enačbo normale na graf funkcije f v točki $T(x_0,-4)$, $x_0>0$.

Írja fel az f függvénygrafikon normálisának egyenletét a $T(x_0,-4)$, $x_0>0$ pontban!

(3 točke/pont)

1.4. Izračunajte nedoločeni integral funkcije h, dane s predpisom $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Számítsa ki a $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ hozzárendelési szabállyal megadott h függvény határozatlan integrálját!

(4 točke/pont)

Naloga 2 je obvezna. / *Az 2. feladat kötelező.*

2. Rešite naslednje naloge.

   Oldja meg a következő feladatokat!

2.1. Dani sta množici $A=\{x\in\mathbb{Q};\ \ |x-2|-2x=1\}$ in $B=\left\{n\in\mathbb{N};\ \ \binom{n+2}{n}=\dfrac{n!}{(n-2)!}+4\right\}$.

Zapišite množice A, B in $A\times B$, tako da naštejete njihove elemente.

Adott az $A=\{x\in\mathbb{Q};\ \ |x-2|-2x=1\}$ *és* $B=\left\{n\in\mathbb{N};\ \ \binom{n+2}{n}=\dfrac{n!}{(n-2)!}+4\right\}$ *halmaz.*

Írja fel az A, B *és* $A\times B$ *halmazokat úgy, hogy felsorolja az elemeit!*

(5 točk/pont)

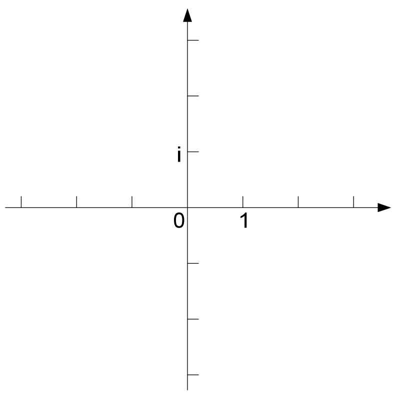
2.2. Vsako izmed množic $C=\{x\in\mathbb{R};\ \ |2x-5|\le 2\}$, $D=\left\{x\in\mathbb{R};\ \ \dfrac{x}{x-2}\ge 2\right\}$ in $C\cap D$ zapišite kot interval.

Írja fel a $C=\{x\in\mathbb{R};\ \ |2x-5|\le 2\}$, $D=\left\{x\in\mathbb{R};\ \ \dfrac{x}{x-2}\ge 2\right\}$ *és* $C\cap D$ *halmazok mindegyikét intervallummal!*

(4 točke/pont)

2.3. V kompleksni ravnini narišite množici $E=\left\{z\in\mathbb{C};\ \ |z|^2+|z-2\mathrm{i}|^2\le 10\right\}$ in $F=\{z\in\mathbb{C};\ \ |\mathrm{Re}\,z|+1<\mathrm{Im}\,z\}$. Dokažite, da je ploščina območja $E-F$ enaka 3π.

Ábrázolja az $E=\left\{z\in\mathbb{C};\ \ |z|^2+|z-2\mathrm{i}|^2\le 10\right\}$ *és* $F=\{z\in\mathbb{C};\ \ |\mathrm{Re}\,z|+1<\mathrm{Im}\,z\}$ *halmazokat a komplex számsíkban! Bizonyítsa be, hogy az* $E-F$ *síkidom területe* 3π *!*



(5 točk/pont)

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole. /
A 3. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

3. Naj bo dana funkcija $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x\sin x$.

Adott az $f(x) = x\sin x$ hozzárendelési szabállyal megadott $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény.

3.1. Dokažite, da je funkcija f soda.

Bizonyítsa be, hogy az f függvény páros!

(1 točka/pont)

3.2. Izračunajte limito $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f'(x)}{f(x)}$.

Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f'(x)}{f(x)}$ határértéket!

(4 točke/pont)

3.3. Izračunajte $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Számítsa ki az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$!

(3 točke/pont)

3.4. Za vsako naravno število n naj S_n označuje ploščino lika, ki ga graf funkcije f omejuje z abscisno osjo med dvema sosednjima ničlama $x_n = n\cdot\pi$ in $x_{n+1} = (n+1)\cdot\pi$. Dokažite, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ ploščina $S_n = (2n+1)\cdot\pi$.

Minden n természetes szám esetén legyen az S_n annak a síkidomnak a területe, amelyet az f függvény és az abszcisszatengely határol két szomszédos $x_n = n\cdot\pi$ és $x_{n+1} = (n+1)\cdot\pi$ zérushely között. Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a terület $S_n = (2n+1)\cdot\pi$-vel egyenlő!

(4 točke/pont)

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole. / ***A 4. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!***

4. Naj bo funkcija f dana s predpisom $f(x)=\sum_{k=0}^{100} x^k = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{100}$.

Adott az $f(x)=\sum_{k=0}^{100} x^k = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{100}$ hozzárendelési szabállyal megadott f függvény.

4.1. Izračunajte $f(1)$ in $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Számítsa ki az $f(1)$ és $f\left(\frac{1}{2}\right)$ értékeket!

(3 točke/pont)

4.2. Brez uporabe računala izračunajte $\int_0^1 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$.

Számológép használata nélkül számítsa ki az $\int_0^1 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$ értékét!

(3 točke/pont)

4.3. Naj bo $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. Izračunajte $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{4}\right)$.

Legyen $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$ minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{4}\right)$ határértéket!

(2 točki/pont)

4.4. Z matematično (popolno) indukcijo dokažite, da za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja $f_n(-1)=0$, če je n liho število, in $f_n(-1)=1$, če je n sodo število.

Teljes indukcióval bizonyítsa be, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén fennáll $f_n(-1)=0$, ha az n páratlan szám és $f_n(-1)=1$, ha az n páros szám!

(4 točke/pont)

M 2 0 1 4 0 2 1 2 M 1 4

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

M 2 0 1 4 0 2 1 2 M 1 6

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

Prazna stran

Üres oldal

Prazna stran

Üres oldal