



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE AUTUNNALE

Livello di base
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 1 ≡

Martedì, 25 agosto 2020 / 120 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.

Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, se $a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$



1. Risolvete i quesiti scritti nella colonna di sinistra della tabella. Scrivete le soluzioni nella colonna di destra. Basatevi sull'esempio risolto.

<p>Scrivete l'insieme immagine della funzione espressa dalla dipendenza $f(x) = 3^x$.</p>	<p>$I_f = (0, \infty)$</p>
<p>Scrivete il numero $a = \sqrt[3]{5}$ nella forma $a = \sqrt[3]{5}$.</p>	<p>$a =$</p>
<p>Risolvete nell'insieme \mathbb{C} l'equazione $x^2 + 9 = 0$.</p>	<p>$x_1 =$, $x_2 =$</p>
<p>Calcolate il prodotto scalare dei vettori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ e $\vec{b} = (2, 1, 5)$.</p>	<p>$\vec{a} \cdot \vec{b} =$</p>
<p>Risolvete l'equazione $\cos x = -1$.</p>	
<p>Determinate il limite della successione con il termine generale $a_n = \frac{3n-1}{2n+5}$.</p>	<p>$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$</p>

(7 punti)



2. Sia n un numero reale e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione espressa dalla dipendenza $f(x) = -2x + n$.

2.1. Se $n = -5$, calcolate $f(-7)$ e lo zero della funzione f .

(3)

2.2. Calcolate n , se $f(3) = 5$.

(2)

2.3. Calcolate n , se $f^{-1}(2) = 4$, dove f^{-1} è la funzione inversa della funzione f .

(2)

(7 punti)



3. Il consumo di un'automobile è di 6 litri di combustibile per 100 chilometri; un furgone, invece, percorre 12 chilometri con un litro di combustibile. Quanto combustibile in più ha consumato il furgone rispetto all'automobile, se ambedue i veicoli hanno percorso 350 chilometri ciascuno? Arrotondate il risultato al millesimo di litro.

(5 punti)



M 2 0 2 4 0 1 1 1 0 7

Non scrivete nel campo grigio.

4. In una successione aritmetica il secondo termine è uguale a 39, il quinto a 30.
- 4.1. Calcolate la ragione, il primo termine e il trentasettesimo termine di tale successione.
- 4.2. Calcolate la somma dei primi 50 termini della successione data.

(4)

(2)

(6 punti)



5. In un contenitore ci sono 18 palline. Metà delle palline sono bianche, un terzo sono azzurre e le rimanenti sono rosse.
- 5.1. Scegliamo a caso una pallina. Qual è la probabilità dell'evento A , che la pallina scelta sia rossa? (2)
- 5.2. Scegliamo a caso contemporaneamente due palline. Qual è la probabilità dell'evento B , che ambedue le palline siano bianche? (3)
- 5.3. Scegliamo a caso contemporaneamente tre palline. Qual è la probabilità dell'evento C , che le palline scelte siano di tre colori diversi? (3)
- (8 punti)



M 2 0 2 4 0 1 1 1 0 9

6. Nel triangolo ABC la lunghezza del lato AB è $c = |AB| = 2$ cm, la lunghezza del lato AC è $b = |AC| = \sqrt{2}$ cm e l'ampiezza dell'angolo $\sphericalangle ABC$ è $\beta = 30^\circ$. Calcolate la lunghezza del lato BC . Scrivete ambedue le soluzioni. Arrotondate il risultato al centesimo di centimetro.

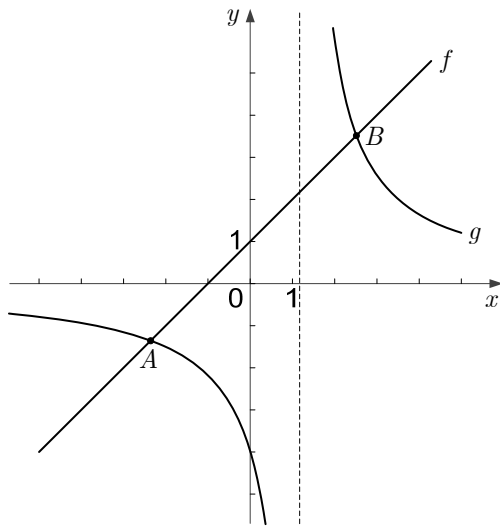
(5 punti)



7. È data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 24x + 6y + 128 = 0$.
- 7.1. Calcolate il centro S e il raggio r di tale circonferenza. (4)
- 7.2. Quanto misura la corda più lunga di tale circonferenza? (1)
- 7.3. Indichiamo sulla circonferenza i punti A e B , che distano l'uno dall'altro 5 unità. Quanti gradi misura l'angolo acuto $\sphericalangle ASB$? (2)
- (7 punti)



8. Nel piano, corredato con il sistema di coordinate, sono stati tracciati i grafici delle funzioni f e g espresse dalle dipendenze $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \frac{28}{6x - 7}$ e i loro punti d'intersezione A e B .



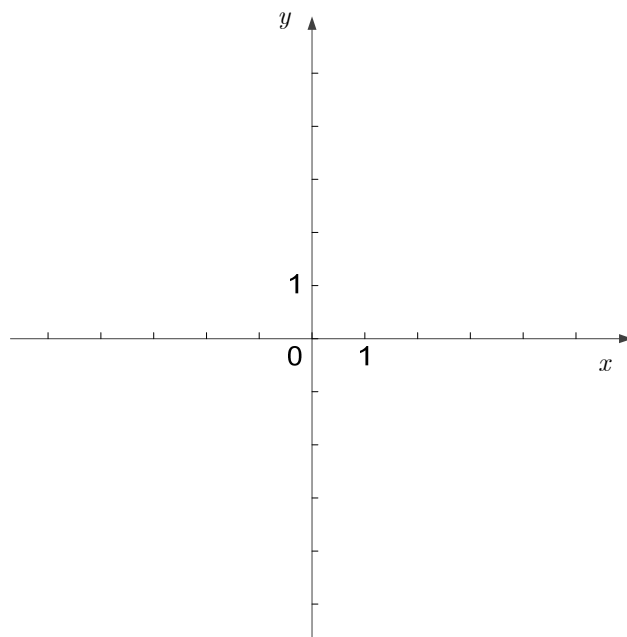
- 8.1. Calcolate le coordinate dei punti A e B . Scrivete le coordinate con le frazioni ridotte ai minimi termini. (4)
- 8.2. Quanto è distante il punto d'intersezione A dall'asintoto orizzontale del grafico della funzione g ? Scrivete la risposta. (2)
- 8.3. Quanto è distante il punto d'intersezione B dall'asintoto verticale del grafico della funzione g ? Scrivete la risposta. (2)

(8 punti)



9. È data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ espressa dalla dipendenza $f(x) = 4^x - 2$.

9.1. Calcolate lo zero e il termine noto della funzione f , scrivete l'equazione dell'asintoto orizzontale del grafico della funzione f e tracciate il grafico.



9.2. Calcolate con quale angolo il grafico della funzione f interseca l'asse delle ascisse. Arrotondate l'ampiezza dell'angolo al primo di grado. (4)

(4)
(8 punti)



10. Per ogni numero naturale n vale che $z_n = i^n$ è un numero complesso, dove i è l'unità immaginaria.

10.1. Calcolate z_1, z_2, z_3 e z_4 .

(2)

10.2. Calcolate $z_{2019} + \overline{z_{2020}}$.

(4)

10.3. Determinate tutti i numeri naturali n , per i quali z_n è un numero reale.

(1)

(7 punti)



11. Per la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vale che $f(1) = 1$ e $f'(x) = 2x - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Scrivete la dipendenza della funzione f .

(6 punti)



M 2 0 2 4 0 1 1 1 1 5

12. Su di un tavolo si trovano, accostate l'una all'altra, una palla piccola e una palla grande, ambedue a forma di sfera. La palla più grande ha il raggio di 15 cm e tocca il tavolo nel punto A . La palla più piccola ha il raggio di 5 cm e tocca il tavolo nel punto B . Risolvete il quesito senza far uso della calcolatrice.

12.1. Calcolate il volume della palla più grande.

(2)

12.2. Qual è la distanza tra i punti A e B ?

(4)

(6 punti)



PAGINA DI RISERVA