Š i f r a   k a n d i d a t a :

Državni izpitni center

M 2 1 0 4 0 2 1 1

PREDMATURITETNI PREIZKUS

Višja raven

MATEMATIKA

Izpitna pola 1

B) Krajše strukturirane naloge
C) Strukturirane naloge

Ponedeljek, 8. marec 2021 / 90 minut (45 + 45)

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko in geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik) in računalo.
Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

~~**Pri reševanju te izpitne pole uporaba računala ni dovoljena.**~~

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.

M 2 1 0 4 0 2 1 1 0 2

Formule

(**Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom**) Za poljubna $a,\ b \in \mathbb{R}$ in za poljubno naravno število n velja

$\boxed{a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)}$,

$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$.

(**Evklidov in višinski izrek**) Pravokotni trikotnik ima kateti a in b ter hipotenuzo c. Višina na hipotenuzo je v_c, pravokotna projekcija katete a na hipotenuzo je a_1, pravokotna projekcija katete b na hipotenuzo pa b_1. Tedaj velja $\boxed{a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1}$, $\boxed{v_c^2 = a_1b_1}$.

(**Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga**) Trikotnik ima stranice $a,\ b$ in c, polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$, ploščina je S, polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je r in polmer danemu trikotniku očrtanega kroga je R. Tedaj je $\boxed{r = \frac{S}{s}}$ in $\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$.

(**Heronova formula**) Trikotnik ima stranice $a,\ b$ in c, polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Tedaj je njegova ploščina $\boxed{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

(**Ploščina trikotnika**) Naj bodo $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ in $C(x_3,\ y_3)$ točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči $A,\ B$ in C je enaka $\boxed{S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|}$.

(**Krogla**) Površina in prostornina krogle s polmerom r sta $\boxed{P = 4\pi r^2,\ V = \frac{4\pi r^3}{3}}$.

(**Razdalja točke od premice**) Naj bodo $a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ in naj a in b ne bosta oba enaka 0. Razdalja točke $T_0(x_0,\ y_0)$ od premice p, podane z enačbo $ax + by - c = 0$, je

$\boxed{d(T_0,\ p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$.

(**Logaritem**) Naj bosta $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$. Tedaj za vsak $x > 0$ velja $\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$.

(**Adicijski izreki**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$\boxed{\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y}$, $\boxed{\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y}$.

Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, za katera je $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ in $\tan x \tan y \neq -1$, velja $\boxed{\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}}$.

(**Kotne funkcije polovičnih kotov**) Za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$\boxed{\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}}$, $\boxed{\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}}$.

Za poljuben $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + \pi \cdot 2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ velja $\boxed{\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}}$.

(**Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$\boxed{\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}}$,

$\boxed{\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}}$,

$\boxed{\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}}$.

M 2 1 0 4 0 2 1 1 0 4

(**Razčlenitev produkta kotnih funkcij**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$\boxed{\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)}$,

$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)}$,

$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)}$.

(**Elipsa**) Elipsa v ravnini ima polosi a in b $(a > b)$, njena linearna ekscentričnost je e, njena numerična ekscentričnost je ε. Tedaj velja $\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Hiperbola**) Hiperbola v ravnini ima realno polos a in imaginarno polos b, njena linearna ekscentričnost je e, njena numerična ekscentričnost je ε. Tedaj velja $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Parabola**) Parabola v ravnini z enačbo $y^2 = 2px$ ima gorišče v $\boxed{G\left(\frac{p}{2},\ 0\right)}$, enačba premice vodnice dane parabole pa je $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

(**Aritmetično zaporedje**) Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja (a_n) je $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(**Geometrijsko zaporedje**) Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja (a_n) s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ je $\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$, če je $q \neq 1$, in $\boxed{S_n = na_1}$, če je $q = 1$.

(**Limiti**) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ in $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.

(**Nedoločeni integral**) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj je za vsak $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$ in $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C}$.

(**Integracija po delih**) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}$.

(**Volumen rotacijskega telesa**) Naj bo $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, zavrtimo okrog abscisne osi za 360°, je $\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x}$.

(**Bernoullijeva formula**) Naj bo p verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek A. Verjetnost, da se dogodek A v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat, je

$\boxed{P(n,\ p,\ k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$.

Konceptni list

M 2 1 0 4 0 2 1 1 0 6

Konceptni list

Konceptni list

Konceptni list

B) KRAJŠE STRUKTURIRANE NALOGE

1. Naj bo n realno število in $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x)=-2x+n$.

   Če je $n=-5$, izračunajte $f(-7)$ in ničlo funkcije f.

   Izračunajte n, če je $f(3)=5$.

   Izračunajte n, če je $f^{-1}(2)=4$, pri čemer je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f.

   (6 točk)

2. Dana je krožnica z enačbo $x^2 + y^2 - 24x + 6y + 128 = 0$.

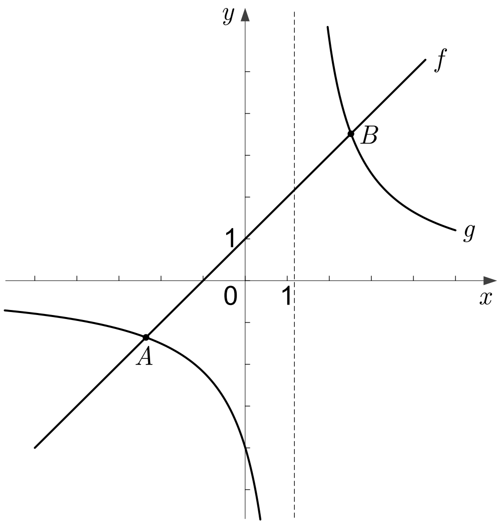
   Izračunajte središče S in polmer r dane krožnice.

   Koliko je dolga najdaljša tetiva dane krožnice?

   Na krožnici narišemo točki A in B, ki sta ena od druge oddaljeni za 5 enot. Koliko stopinj meri ostri kot $\sphericalangle ASB$?

(7 točk)

3. V ravnini, opremljeni s koordinatnim sistemom, sta narisana grafa funkcij f in g s predpisoma $f(x) = x + 1$ in $g(x) = \dfrac{28}{6x - 7}$ ter njuni presečišči A in B.



Izračunajte koordinate točk A in B. Koordinate zapišite v obliki okrajšanih ulomkov.

Koliko je presečišče A oddaljeno od vodoravne asimptote grafa funkcije g? Zapišite odgovor.

Koliko je presečišče B oddaljeno od navpične asimptote grafa funkcije g? Zapišite odgovor.

(8 točk)

4. Naj bo $w = 2 - 5\mathrm{i}$ kompleksno število. Izračunajte vsoto $v = \operatorname{Im} w + \operatorname{Re} w$ in produkt $p = \operatorname{Im} w \cdot \operatorname{Re} w$.

   Izračunajte kompleksno število z, za katero velja: $\begin{aligned} 4\operatorname{Re} z + 3\operatorname{Im} z &= 1 \\ 5\operatorname{Re} z - 6\operatorname{Im} z &= \frac{9}{2} \end{aligned}$.

(7 točk)

5. Za funkcijo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ velja, da je $f(1)=1$ in $f'(x)=2x-1$ za vsak $x\in\mathbb{R}$. Zapišite predpis funkcije f.

(6 točk)

M 2 1 0 4 0 2 1 1 1 4

6. Imamo dve prazni cisterni, ki imata obliko valja in stojita na osnovnih ploskvah.
Prva cisterna ima obliko pokončnega valja s polmerom 3 dm. Vanjo nalijemo 120 litrov jabolčnega soka in jo tako napolnimo do dveh tretjin. Izračunajte višino cisterne. Rezultat zaokrožite na desetinko decimetra.
Druga cisterna ima obliko enakostraničnega valja (osni presek je kvadrat). Vanjo nalijemo 120 litrov jabolčnega soka in jo tako napolnimo do vrha. Izračunajte polmer cisterne. Rezultat zaokrožite na desetinko decimetra.

(6 točk)

Rezervna stran

C) STRUKTURIRANE NALOGE

1. Dana je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

   1.1. Izračunajte vse ničle, stacionarne točke ter minimalno in maksimalno vrednost funkcije f.

   (6 točk)

   1.2. Dokažite, da je $f(x)=2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.

   (2 točki)

   1.3. Izračunajte realno število $a\in\left(0,\ \frac{2\pi}{3}\right)$, tako da bo ploščina območja med grafom funkcije f, abscisno osjo ter premicama $x=0$ in $x=a$ enaka $\sqrt{2}+1$.

   (3 točke)

M 2 1 0 4 0 2 1 1 1 8

2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A\left(\sqrt{5},\ 0,\ 0\right)$, $B(0,\ 2,\ 0)$ in $C\left(0,\ 0,\ \sqrt{11}\right)$. Točka $O(0,\ 0,\ 0)$ je izhodišče koordinatnega sistema.

2.1. Izračunajte dolžine stranic trikotnika $\triangle ABC$.

(2 točki)

2.2. Izračunajte ploščino trikotnika $\triangle ABC$.

(4 točke)

2.3. Točke O, A, B in C so oglišča tristrane piramide. Površina te piramide je sestavljena iz treh pravokotnih trikotnikov in trikotnika $\triangle ABC$. Dokažite, da je vsota kvadratov ploščin vseh treh pravokotnih trikotnikov enaka kvadratu ploščine trikotnika $\triangle ABC$.

(3 točke)

M 2 1 0 4 0 2 1 1 2 0

Rezervna stran