



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SIMULAZIONE DI PROVA

Livello superiore
MATEMATICA

≡≡≡ Prova d'esame 1 ≡≡≡

- B) Quesiti strutturati brevi
C) Quesiti strutturati

Lunedì, 8 marzo 2021 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice.

Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

~~Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.~~

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

**Formule**

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato è r e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}$$

(Formola di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area è

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici A, B e C è uguale a

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ vale $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formola di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.



M 2 1 0 4 0 2 1 1 0 5

Foglio per la minuta

Blank area for notes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta

A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten notes.



M 2 1 0 4 0 2 1 1 0 7

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large empty rectangular box intended for writing the minutes of a meeting.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 1 0 4 0 2 1 1 1 0 9

B) QUESITI STRUTTURATI BREVI

1. Sia n un numero reale e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione con la dipendenza $f(x) = -2x + n$.

Se $n = -5$, calcolate $f(-7)$ e lo zero della funzione f .

Calcolate n , se $f(3) = 5$.

Calcolate n , se $f^{-1}(2) = 4$, dove f^{-1} è la funzione inversa della funzione f .

(6 punti)



2. È data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 24x + 6y + 128 = 0$.

Calcolate il centro S e il raggio r della circonferenza data.

Quanto è lunga la corda massima della circonferenza data?

Indichiamo sulla circonferenza i punti A e B , che distano uno dall'altro 5 unità. Qual è l'ampiezza in gradi dell'angolo acuto $\sphericalangle ASB$?

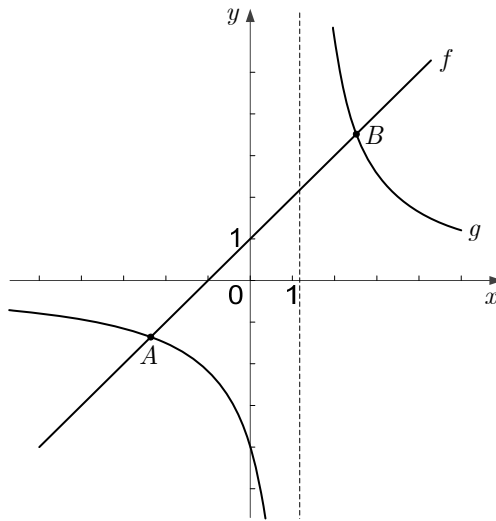
(7 punti)



M 2 1 0 4 0 2 1 1 1 1

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

3. In un piano, corredato da un sistema di coordinate, sono stati tracciati i grafici delle funzioni f e g espresse dalle dipendenze $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \frac{28}{6x - 7}$ e i loro punti d'intersezione A e B .



Calcolate le coordinate dei punti A e B . Scrivete le coordinate in frazioni ridotte ai minimi termini.

A che distanza si trova il punto d'intersezione A dall'asintoto orizzontale al grafico della funzione g ? Scrivete la risposta.

A che distanza si trova il punto d'intersezione B dall'asintoto verticale al grafico della funzione g ? Scrivete la risposta.

(8 punti)



4. Sia $w = 2 - 5i$ un numero complesso. Calcolate la somma $v = \operatorname{Im} w + \operatorname{Re} w$ e il prodotto $p = \operatorname{Im} w \cdot \operatorname{Re} w$.

Calcolate il numero complesso z , per il quale vale che:

$$4\operatorname{Re} z + 3\operatorname{Im} z = 1$$

$$5\operatorname{Re} z - 6\operatorname{Im} z = \frac{9}{2}$$

(7 punti)



M 2 1 0 4 0 2 1 1 1 3

5. Per la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vale che $f(1) = 1$ e $f'(x) = 2x - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Scrivete la dipendenza della funzione f .

(6 punti)



6. Due cisterne vuote, a forma di cilindro, poggiano sulle loro basi.
La prima cisterna ha la forma di un cilindro retto di raggio 3 dm. Versiamo in essa 120 litri di succo di mela, e la riempiamo così per due terzi. Calcolate l'altezza della cisterna. Arrotondate il risultato al decimo di decimetro.
La seconda cisterna ha la forma di un cilindro equilatero (la sezione assiale è un quadrato). Versiamo in essa 120 litri di succo di mela, riempiendola così fino all'orlo. Calcolate il raggio della cisterna. Arrotondate il risultato al decimo di decimetro.

(6 punti)



M 2 1 0 4 0 2 1 1 1 5

Pagina di riserva

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

VOLTATE IL FOGLIO.

**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. È data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la dipendenza $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.
- 1.1. Calcolate tutti gli zeri, i punti stazionari, il valore massimo e il valore minimo della funzione f . (6 punti)
- 1.2. Dimostrate che $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. (2 punti)
- 1.3. Calcolate il numero reale $a \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, tale che l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione f , dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = 0$ e $x = a$ sia uguale a $\sqrt{2} + 1$. (3 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten input.



2. Nello spazio \mathbb{R}^3 sono dati i punti $A(\sqrt{5}, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, \sqrt{11})$. Il punto $O(0, 0, 0)$ è l'origine del sistema di coordinate.
- 2.1. Calcolate la lunghezza dei lati del triangolo $\triangle ABC$. (2 punti)
- 2.2. Calcolate l'area del triangolo $\triangle ABC$. (4 punti)
- 2.3. I punti O , A , B e C sono i vertici di una piramide a base triangolare. L'area della superficie totale di tale piramide è costituita da tre triangoli rettangoli e dal triangolo $\triangle ABC$. Dimostrate che la somma dei quadrati delle aree di tutti e tre i triangoli rettangoli è uguale al quadrato dell'area del triangolo $\triangle ABC$. (3 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten input.



Pagina di riserva