



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SIMULAZIONE DI PROVA

Livello superiore
MATEMATICA

≡≡≡ Prova d'esame 2 ≡≡≡

B) Quesiti strutturati brevi
C) Quesiti strutturati

Lunedì, 8 marzo 2021 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice.

Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

**Formule**

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato è r e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}$$

(Formula di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area è

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici A, B e C è uguale a $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ vale $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua

eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità

lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta

direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di

ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si

forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formula di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1 0 5

Foglio per la minuta

Blank area for the minutes sheet.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta

Empty rectangular area for minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1 0 7

Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large, empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1 0 9

B) QUESITI STRUTTURATI BREVI

1. Per due numeri naturali qualsiasi m e n indichiamo con $D(m, n)$ il massimo comune divisore dei due numeri e con $v(m, n)$ il loro minimo comune multiplo.

Scomponete i numeri 45, 48 e 60 in fattori primi.

Calcolate $\left(\frac{D(45, 48)}{D(48, 60)} - \frac{D(11, 23)}{v(4, 10)} \right) \cdot v(5, 20)$.

(8 punti)



2. Il consumo di un'automobile è di 6 litri di carburante per 100 chilometri, un furgone invece con un litro di carburante percorre 12 chilometri. Quanto carburante il furgone ha consumato in più rispetto all'automobile, se ambedue i veicoli hanno percorso 350 chilometri? Arrotondate il risultato al millesimo di litro.

(5 punti)



3. In una successione aritmetica il secondo termine è uguale a 39, il quinto invece a 30.
Calcolate la ragione, il primo termine e il trentasettesimo termine della successione data.
Calcolate la somma dei primi 50 termini della successione data.

(6 punti)



4. In una classe con 28 alunni, 12 sono femmine e 16 sono maschi. Tre maschi si chiamano Anže.
L'insegnante sceglierà a caso per un'interrogazione uno degli alunni (femmina o maschio) di tale classe. Calcolate la probabilità dell'evento A , che il nome dell'alunno da interrogare a caso si chiami Anže.

L'insegnante sceglierà a caso per un'interrogazione due maschi di tale classe. Calcolate la probabilità dell'evento B , che esattamente uno degli alunni si chiami Anže.

L'insegnante sceglierà a caso per un'interrogazione tre alunni di tale classe. Calcolate la probabilità dell'evento C , che nel terzetto scelto a caso siano rappresentati ambedue i sessi.

(8 punti)



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1 1 3

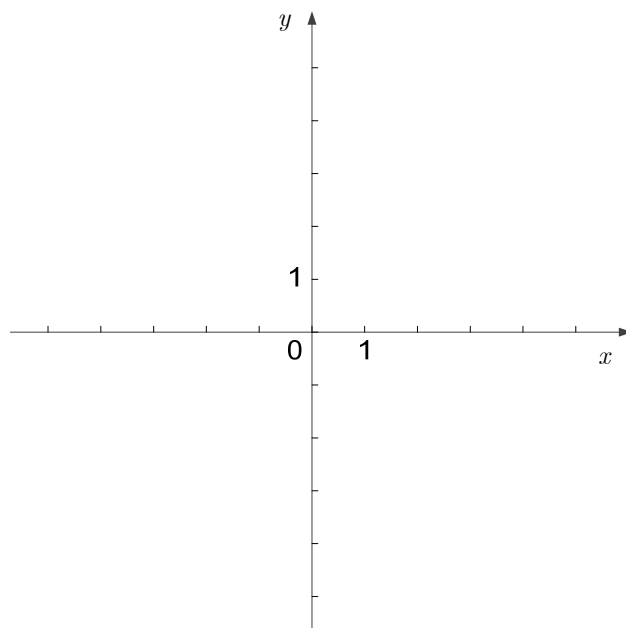
5. In un triangolo ABC la lunghezza del lato AB è $c = |AB| = 2$ cm, la lunghezza del lato AC è $b = |AC| = \sqrt{2}$ cm e l'ampiezza dell'angolo $\sphericalangle ABC$ è $\beta = 30^\circ$. Calcolate la lunghezza del lato BC . Scrivete ambedue le soluzioni. Arrotondate il risultato al centesimo di centimetro.

(5 punti)



6. È data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la dipendenza $f(x) = 4^x - 2$.

Calcolate lo zero e il termine noto della funzione f , scrivete l'equazione dell'asintoto orizzontale al grafico della funzione f e tracciatene il grafico.



Calcolate con quale angolo il grafico della funzione f interseca l'asse delle ascisse. Arrotondate l'ampiezza dell'angolo al primo di grado.

(8 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Pagina di riserva

VOLTATE IL FOGLIO.

**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. Risolvete i quesiti seguenti.

1.1. Determinate con l'algoritmo di Euclide il massimo comune divisore dei numeri $a = 27839$ e $b = 58685$.

(2 punti)

1.2. Sia n un numero naturale qualsiasi. Quanti divisori ha il numero $c = 24^{n+2} \cdot 6^{n-1}$ nell'insieme dei numeri naturali?

(3 punti)

1.3. Calcolate $S = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$. Dimostrate il risultato per induzione matematica.

(5 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten input.



2. È dato l'insieme di rette $M = \{p; p \text{ di equazione } y = kx + n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, |k| \leq 3, |n| \leq 3\}$.
- 2.1. Scegliamo a caso dall'insieme M una retta. Calcolate la probabilità degli eventi:
 A – la retta prescelta interseca l'asse delle ascisse esattamente nel punto $T(-1, 0)$;
 B – l'angolo d'inclinazione della retta prescelta è $\arctan 2$;
 C – la retta prescelta e gli assi di coordinate delimitano un triangolo di area $A = 2$.
(6 punti)
- 2.2. Scegliamo a caso dall'insieme M una retta. Ripetiamo tale prova dodici volte. Calcolate la probabilità dell'evento
 E – abbiamo scelto esattamente otto volte la retta parallela alla bisettrice dei quadranti pari.
(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten or printed content.



Pagina di riserva