Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore

MATEMATICA

Prova d'esame 1

B) Quesiti strutturati brevi
C) Quesiti strutturati

Sabato, 5 giugno 2021 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:
Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice.
Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

~~**Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.**~~

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti,** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia

Formule

(**Somma e differenza di potenze a esponente naturale**) Per qualsiasi $a,\ b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$\boxed{a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)}$,

$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}$.

(**Teorema di Euclide e dell'altezza**) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c. L'altezza all'ipotenusa è h_c, la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1, la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1. Quindi vale $\boxed{a^2=ca_1,\ b^2=cb_1}$, $\boxed{h_c^2=a_1b_1}$.

(**Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo**) Il triangolo ha i lati $a,\ b$ e c, il semiperimetro è $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, l'area è A, l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato è r e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è R. Quindi è $\boxed{r=\dfrac{A}{p}}$ e $\boxed{R=\dfrac{abc}{4A}}$.

(**Formula di Erone**) Il triangolo ha i lati $a,\ b$ e c, il semiperimetro è $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area è $\boxed{A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

(**Area del triangolo**) Siano $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ e $C(x_3,\ y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici $A,\ B$ e C è uguale a $\boxed{A=\dfrac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|}$.

(**Sfera**) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $\boxed{S=4\pi r^2,\ V=\dfrac{4\pi r^3}{3}}$.

(**Distanza di un punto da una retta**) Siano $a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0,\ y_0)$ dalla retta p, espressa dall'equazione $ax+by-c=0$, è $\boxed{d(T_0,\ p)=\dfrac{|\,ax_0+by_0-c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

(**Logaritmo**) Siano $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$. Quindi per ogni $x>0$ vale $\boxed{\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$.

(**Teoremi di addizione**) Per qualsiasi $x,\ y\in\mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}$, $\boxed{\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y}$.

Per qualsiasi $x,\ y\in\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, per i quali $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ per qualsiasi $k\in\mathbb{Z}$ e $\tan x\tan y\neq -1$, vale $\boxed{\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}}$.

(**Formule di bisezione**) Per qualsiasi $x\in\mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}}$, $\boxed{\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}}$.

Per qualsiasi $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+\pi\cdot 2k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ vale $\boxed{\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}$.

(**Formule di prostaferesi**) Per qualsiasi $x,\ y\in\mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin x\pm\sin y=2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cos\dfrac{x\mp y}{2}}$,

$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}$,

$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}}$.

(**Formule del Werner**) Per qualsiasi $x,\ y \in \mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}\big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\big)}$,

$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)}$,

$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)}$.

(**Ellisse**) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b $(a > b)$, la sua eccentricità lineare è e, la sua eccentricità numerica è ε. Quindi vale $\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Iperbole**) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b, la sua eccentricità lineare è e, la sua eccentricità numerica è ε. Quindi vale $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Parabola**) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $\boxed{F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)}$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

(**Successione aritmetica**) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(**Successione geometrica**) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di ragione $q \in \mathbb{R}$ è $\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$, se $q \neq 1$, e $\boxed{S_n = na_1}$, se $q = 1$.

(**Limiti**) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ e $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.

(**Integrale indefinito**) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$ e $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C}$.

(**Integrazione per partes**) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}$.

(**Volume del solido di rotazione**) Sia $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f, l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360°, è $\boxed{V = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x}$.

(**Formula di Bernouilli**) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A. La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $\boxed{P(n,\ p,\ k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$.

Foglio per la minuta

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 0 6

Foglio per la minuta

Foglio per la minuta

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 0 8

Foglio per la minuta

B) QUESITI STRUTTURATI BREVI

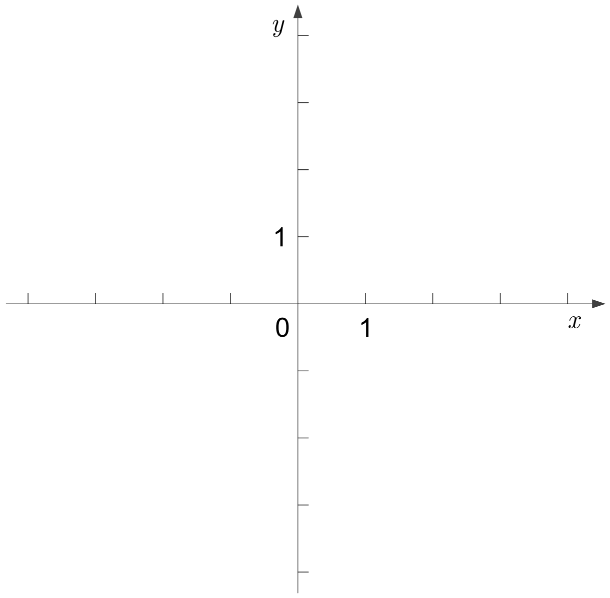
1. Risolvete le seguenti equazioni senza usare la calcolatrice
   $7^{x-2} = \sqrt{7}$
   e
   $\log_7\left(\sqrt{11} - x\right) + \log_7\left(\sqrt{11} + x\right) = 1.$

(6 punti)

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 1 0

2. È data la funzione f con la dipendenza $f(x)=\begin{cases} 1; & x>-1 \\ x+2; & x\leq -1 \end{cases}$.

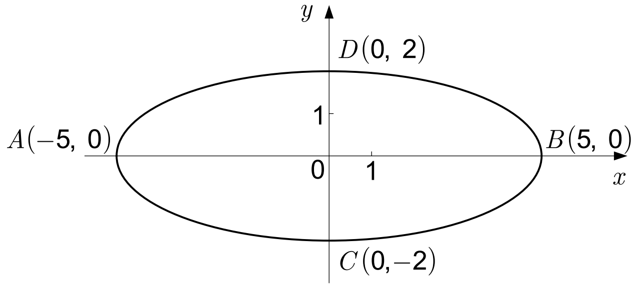
Tracciate nel piano, corredato con un sistema di assi coordinati, il grafico della funzione f. Nello stesso sistema di coordinate tracciate la retta di equazione $y=x$.



In quanti punti la retta di equazione $y=x$ interseca il grafico della funzione f? Determinate tutti i numeri reali k, per i quali la retta di equazione $y=k\cdot x$ interseca il grafico della funzione f esattamente due volte. Aiutatevi con il grafico.

(5 punti)

3. La figura mostra un'ellisse di vertici A, B, C e D. Scrivete i fuochi di tale ellisse. Scrivete anche l'equazione della circonferenza con centro nel punto B e passante per l'origine del sistema di coordinate.



(8 punti)

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 1 2

4. In una successione aritmetica con il termine generale a_n vale che: $a_2 + a_4 = 26$ e $a_3 + a_5 = 34$. Calcolate la somma dei primi 50 termini di tale successione.

(7 punti)

5. Scrivete la dipendenza della funzione quadratica che ha per $x = 1$ il valore d'estremo 4 e lo zero in $x_1 = 3$.

(7 punti)

6. Per la funzione f vale che $f(0) = 2021$ e $f'(x) = e^{-x} + 3x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Scrivete la dipendenza della funzione f. Calcolate anche $f'(1)$.

(7 punti)

Pagina di riserva

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 1 6

C) QUESITI STRUTTURATI

1. La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sia espressa dalla dipendenza $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-1$.

   1.1. Scrivete l'equazione della normale al grafico della funzione f, che è parallela alla retta di equazione $x-y-3=0$.

   (4 punti)

   1.2. Calcolate l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione f e dalla retta di equazione $x-y-1=0$.

   (4 punti)

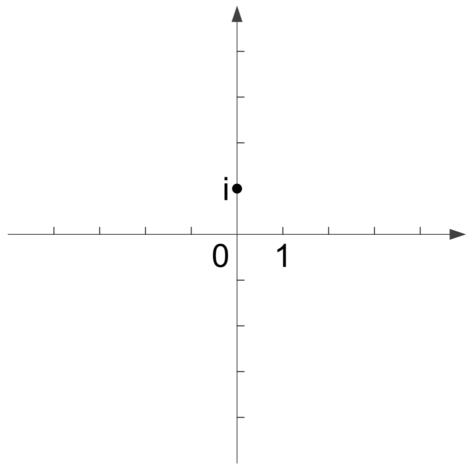
   1.3. La funzione $g:[2,\ \infty)\to\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right]$ sia espressa dalla dipendenza $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-1$.
   La funzione g è suriettiva? Argomentate la risposta.

   (2 punti)

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 1 8

2. Sono dati gli insiemi $A=\{z\in\mathbb{C};\ |z-1|=2\}$, $B=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z)=2\}$ e $C=\{z\in\mathbb{C};\ z^2+\overline{z}^2=2\}$.

   2.1. Disegnate gli insiemi A e B nel piano complesso, corredato con il sistema di coordinate; calcolate, inoltre, l'area del rettangolo che ha un suo lato giacente sull'asse immaginario, e due suoi vertici come elementi dell'insieme $A\cap B$.



(5 punti)

   2.2. Dimostrate che la curva, rappresentata dall'insieme C, è un'iperbole.

(2 punti)

   2.3. Calcolate in quale punto della curva di equazione $x^2-y^2=1$ la retta tangente alla curva data ha equazione $y=-\sqrt{2}x+1$.

(3 punti)

M 2 1 1 4 0 2 1 1 I 2 0

Pagina di riserva