Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 2 1 1 4 0 2 1 2

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Višja raven
MATEMATIKA

Izpitna pola 2

B) Krajše strukturirane naloge
C) Strukturirane naloge

Sobota, 5. junij 2021 / 90 minut (45 + 45)

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko,
geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik)
in računalo.
Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.

M 2 1 1 4 0 2 1 2 0 2

Formule

(**Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom**) Za poljubna $a,\ b \in \mathbb{R}$ in za poljubno naravno število n velja

$$\boxed{a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)},$$

$$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}.$$

(**Evklidov in višinski izrek**) Pravokotni trikotnik ima kateti a in b ter hipotenuzo c. Višina na hipotenuzo je v_c, pravokotna projekcija katete a na hipotenuzo je a_1, pravokotna projekcija katete b na hipotenuzo pa b_1. Tedaj velja $\boxed{a^2=ca_1,\ b^2=cb_1}$, $\boxed{v_c^2=a_1b_1}$.

(**Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga**) Trikotnik ima stranice a, b in c, polovica obsega je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, ploščina je S, polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je r in polmer danemu trikotniku očrtanega kroga je R. Tedaj je $\boxed{r=\dfrac{S}{s}}$ in $\boxed{R=\dfrac{abc}{4S}}$.

(**Heronova formula**) Trikotnik ima stranice a, b in c, polovica obsega je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Tedaj je njegova ploščina $\boxed{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

(**Ploščina trikotnika**) Naj bodo $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ in $C(x_3,\ y_3)$ točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči A, B in C je enaka $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|}$.

(**Krogla**) Površina in prostornina krogle s polmerom r sta $\boxed{P=4\pi r^2,\ V=\dfrac{4\pi r^3}{3}}$.

(**Razdalja točke od premice**) Naj bodo $a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ in naj a in b ne bosta oba enaka 0. Razdalja točke $T_0(x_0,\ y_0)$ od premice p, podane z enačbo $ax+by-c=0$, je

$$\boxed{d(T_0,\ p)=\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

(**Logaritem**) Naj bosta $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$. Tedaj za vsak $x>0$ velja $\boxed{\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$.

(**Adicijski izreki**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$$\boxed{\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y},\quad \boxed{\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y}.$$

Za poljubna $x,\ y\in\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, za katera je $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ za poljuben $k\in\mathbb{Z}$ in $\tan x\tan y\neq -1$, velja $\boxed{\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}}$.

(**Kotne funkcije polovičnih kotov**) Za poljuben $x\in\mathbb{R}$ velja

$$\boxed{\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}},\quad \boxed{\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Za poljuben $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+\pi\cdot 2k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ velja $\boxed{\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}$.

(**Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij**) Za poljubna $x,\ y\in\mathbb{R}$ velja

$$\boxed{\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}},$$

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}},$$

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}.$$

(**Razčlenitev produkta kotnih funkcij**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$\boxed{\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))}$,

$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))}$,

$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))}$.

(**Elipsa**) Elipsa v ravnini ima polosi a in b $(a > b)$, njena linearna ekscentričnost je e, njena numerična ekscentričnost je ε. Tedaj velja $\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Hiperbola**) Hiperbola v ravnini ima realno polos a in imaginarno polos b, njena linearna ekscentričnost je e, njena numerična ekscentričnost je ε. Tedaj velja $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Parabola**) Parabola v ravnini z enačbo $y^2 = 2px$ ima gorišče v $\boxed{G\left(\frac{p}{2},\ 0\right)}$, enačba premice vodnice dane parabole pa je $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

(**Aritmetično zaporedje**) Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja (a_n) je $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(**Geometrijsko zaporedje**) Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja (a_n) s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ je $\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$, če je $q \neq 1$, in $\boxed{S_n = na_1}$, če je $q = 1$.

(**Limiti**) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ in $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.

(**Nedoločeni integral**) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj je za vsak $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$ in $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C}$.

(**Integracija po delih**) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}$.

(**Volumen rotacijskega telesa**) Naj bo $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, zavrtimo okrog abscisne osi za 360°, je $\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x}$.

(**Bernoullijeva formula**) Naj bo p verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek A. Verjetnost, da se dogodek A v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat, je

$\boxed{P(n,\ p,\ k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$.

Konceptni list

Konceptni list

Konceptni list

M 2 1 1 4 0 2 1 2 0 8

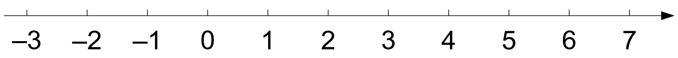
Konceptni list

B) KRAJŠE STRUKTURIRANE NALOGE

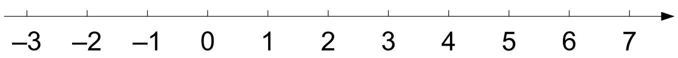
1. Dani sta množici $A = (-1, 3]$ in $B = \{x \in \mathbb{R};\ x < 2\}$.

Ponazorite množici A in B na številski premici.

A



B



Vsaka množica v levem stolpcu preglednice je enaka enemu izmed intervalov v desnem stolpcu. Intervali v desnem stolpcu so označeni s številkami od 1 do 5.

V za to namenjen prostor v preglednici vpišite številko intervala, ki je enak množici v levem stolpcu preglednice (prva vrstica je že pravilno izpolnjena).

B	5
$A \cap B$	
$A \cup B$	
$A \setminus B$	

1: $[2, 3]$

2: $[2, \infty)$

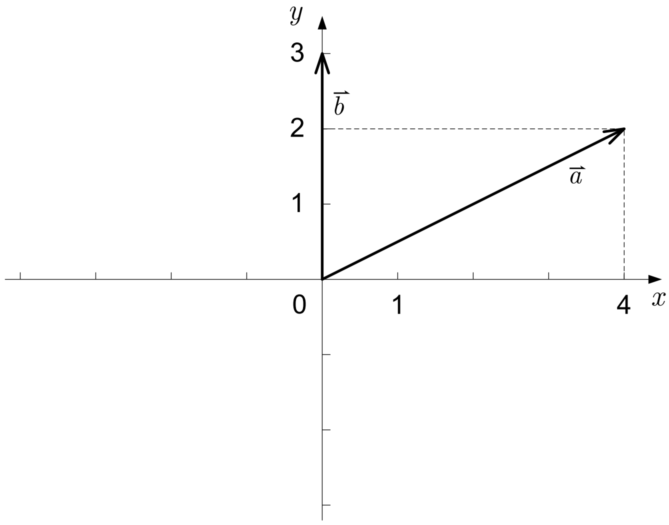
3: $(-1, 2)$

4: $(-\infty, 3]$

5: $(-\infty, 2)$

(5 točk)

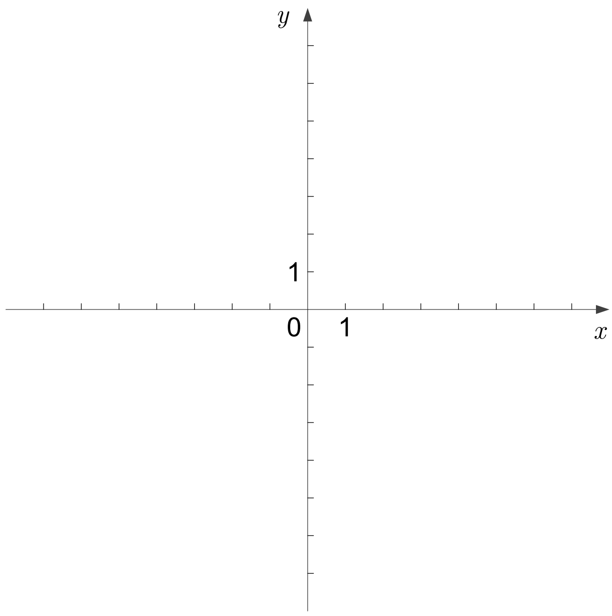
2. V ravnini, opremljeni s koordinatnim sistemom, sta narisana vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Narišite vektor $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. Kolikšni sta dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$? Koliko meri kot φ med $\vec{a}$ in $\vec{b}$? Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje.



(8 točk)

3. Dana je funkcija f s predpisom $f(x)=3\cdot 2^{x}-1$.

V ravnino, opremljeno s koordinatnim sistemom, narišite graf funkcije f in zapišite enačbo asimptote grafa.



Če graf funkcije f prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov, dobimo graf funkcije g. Zapišite predpis funkcije g.

(6 točk)

4. V posodi je 18 kroglic. Polovica je belih, tretjina je modrih, preostale so rdeče.

   Naključno izberemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da je izbrana rdeča kroglica?

   Naključno izberemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost dogodka B, da sta obe kroglici beli?

   Naključno izberemo tri kroglice. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da so izbrane kroglice treh različnih barv?

(8 točk)

5. Rešite enačbo $\cos x + \cos 2x = 0$.

(6 točk)

6. Dani sta funkciji f in g s predpisoma $f(x) = 2x^3$ in $g(x) = x^2 + 1$.

   Dokažite, da se grafa funkcij f in g sekata samo v točki z absciso $x = 1$.

   Izračunajte kot, pod katerim se sekata grafa funkcij f in g. Kot zaokrožite na minuto.

   (7 točk)

Rezervna stran

C) STRUKTURIRANE NALOGE

1. Rešite naslednje naloge iz obrestno obrestnega računa. Rezultate zaokrožite na stotinko evrov.

   V vseh nalogah gre za obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti in letno obrestno mero 1,5 %.

   1.1. V začetku leta 2000 smo imeli na računu 580 €. Koliko smo imeli na računu 11 let kasneje, če medtem nismo opravili nobenega dviga in nobenega pologa?

   (3 točke)

   1.2. Pet let zapored smo na začetku vsakega leta v banko vložili 180 €. Koliko je znašala skupna privarčevana vsota šest let po zadnji vlogi?

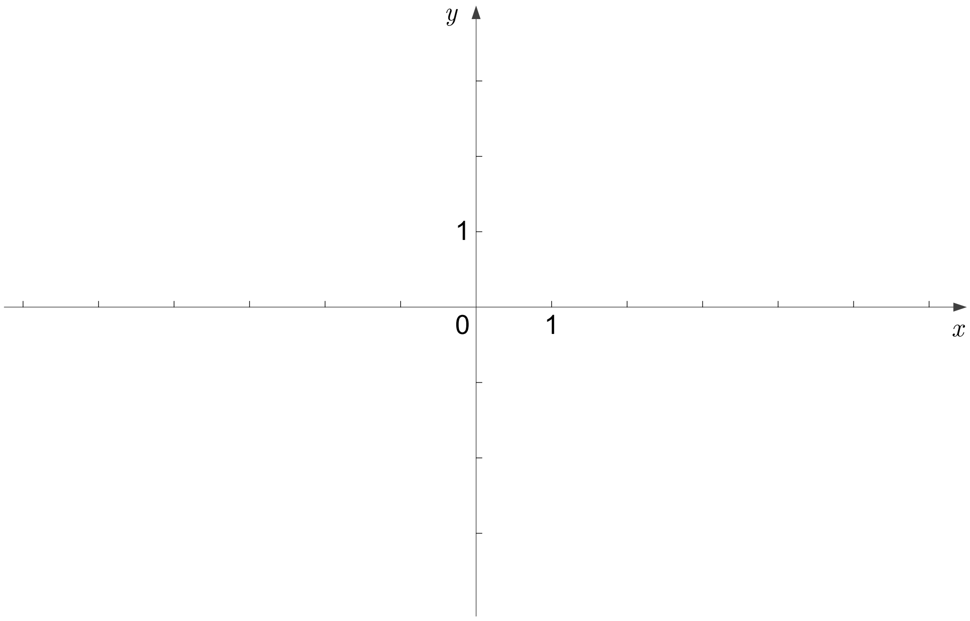
   (3 točke)

   1.3. V začetku leta 2009 smo najeli posojilo v višini 18000 €. Odplačali smo ga z dvanajstimi enakimi letnimi obroki, prvič konec leta 2009. Kolikšen je bil obrok?

   (4 točke)

2. Dana je funkcija $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $g(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$ in trikrat odvedljiva funkcija f, za katero velja $f(1)=2021$, $f'(1)=0$ in $f''(1)=-2021$.

   2.1. Izračunajte $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Dokažite, da je funkcija g padajoča, in narišite njen graf.



(5 točk)

   2.2. Iz družine funkcij $\{G:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ G'(x)=g'(x)\ \text{za vsak}\ x\in\mathbb{R}\}$ določite tisto, za katero velja $G(\ln 3)=1$.

(3 točke)

   2.3. Ali ima funkcija f v točki $x=1$ lokalni minimum? Odgovor utemeljite.

(2 točki)

M 2 1 1 4 0 2 1 2 2 0

Rezervna stran